

# Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter 誤差状態カルマンフィルタ構築に向けた クォータニオンキネマティクス

Joan Solà  
(翻訳)

森田 直人, 金 周会, 小山 高, 高嶋 一輝, 田口 康之, 廣瀬 帆  
横畑 大樹, 平野 皓己, 藤原 啓明, 杉山 詩歩, 森永 智大

April 28, 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>クォータニオンの定義と性質</b>	<b>4</b>
1.1	クォータニオンの定義	4
1.1.1	クォータニオンに関する別の表現	6
1.2	クォータニオンの主な性質	6
1.2.1	和	6
1.2.2	クォータニオン積	7
1.2.3	恒等クォータニオン	8
1.2.4	共役	8
1.2.5	ノルム	9
1.2.6	逆クォータニオン	9
1.2.7	単位 (正規化) クォータニオン	9
1.3	さらなるクォータニオンの性質	9
1.3.1	クォータニオン交換子	9
1.3.2	純クォータニオン積	10
1.3.3	純クォータニオンの自然数による乗算	10
1.3.4	純クォータニオンの指数関数	10
1.3.5	一般クォータニオンの指数関数	11
1.3.6	単位クォータニオンの対数関数	11
1.3.7	一般クォータニオンの対数関数	12
1.3.8	$\mathbf{q}^t$ 形式に対する指数関数	12

<b>2</b>	<b>回転と相互関係</b>	<b>12</b>
2.1	三次元ベクトル回転公式	12
2.2	回転群 $SO(3)$	14
2.3	回転群と回転行列	16
2.3.1	指数写像	17
2.3.2	大文字の指数写像	18
2.3.3	回転行列と回転ベクトル：ロドリゲス回転公式	19
2.3.4	対数写像	20
2.3.5	回転作用	20
2.4	回転群とクォータニオン	21
2.4.1	指数写像 $\exp$	21
2.4.2	大文字の指数写像 $\text{Exp}$	22
2.4.3	クォータニオン及び回転ベクトル	23
2.4.4	対数写像 $\log$	23
2.4.5	回転作用	24
2.4.6	$SO(3)$ 多様体の二重被覆	25
2.5	回転行列とクォータニオン	26
2.6	回転の合成	27
2.7	球状線形補間 (SLERP)	28
2.8	クォータニオンと等角回転: 「魔法」の解説	31
<b>3</b>	<b>クォータニオンに関する慣習 (本稿での選択)</b>	<b>34</b>
3.1	クォータニオンの流派	34
3.1.1	クォータニオン成分の順番	36
3.1.2	クォータニオン代数の仕様	37
3.1.3	回転演算子の機能	37
3.1.4	回転演算子の方向	38
<b>4</b>	<b>摂動, 微分, 積分</b>	<b>39</b>
4.1	$SO(3)$ における加法演算子と減法演算子	39
4.2	4つの可能な微分の定義	40
4.2.1	ベクトル空間からベクトル空間への関数	40
4.2.2	$SO(3)$ から $SO(3)$ への関数	40
4.2.3	ベクトル空間から $SO(3)$ への関数	41
4.2.4	$SO(3)$ からベクトル空間への関数	41
4.3	非常に有用な回転のヤコビアン	41
4.3.1	ベクトルについてのヤコビアン	41
4.3.2	クォータニオンについてのヤコビアン	42
4.3.3	$SO(3)$ についての右ヤコビアン	42
4.3.4	回転ベクトルについてのヤコビアン	44
4.3.5	回転の合成のヤコビアン	44
4.4	摂動, 不確定性, ノイズ	45
4.4.1	局所的な摂動	45

4.4.2	大域的な摂動	46
4.5	クォータニオンの時間微分	46
4.5.1	グローバル座標系からローカル座標系への変換における関係式	48
4.5.2	クォータニオン積の時間微分	48
4.5.3	その他微分に関する有用な式	48
4.6	角速度の時間積分	49
4.6.1	0次積分	50
4.6.2	1次積分	51
<b>5</b>	<b>IMU (慣性観測装置) を用いたシステムの誤差状態キネマティクス</b>	<b>53</b>
5.1	動機	53
5.2	誤差状態カルマンフィルタの説明	53
5.3	連続時間系のキネマティクス	54
5.3.1	真の状態のキネマティクス	54
5.3.2	ノミナル状態のキネマティクス	57
5.3.3	誤差状態のキネマティクス	57
5.4	離散時間におけるシステムキネマティクス	60
5.4.1	ノミナル状態のキネマティクス	60
5.4.2	誤差状態のキネマティクス	60
5.4.3	誤差状態ヤコビアンと摂動行列	61
<b>6</b>	<b>IMU と補完するセンサデータとの組み合わせ</b>	<b>62</b>
6.1	フィルタ修正を通じた誤差状態の観測	63
6.1.1	フィルタ修正のためのヤコビアンの計算	63
6.2	観測した誤差をノミナル状態に反映し計算する	65
6.3	ESKF を初期化する	65
6.3.1	姿勢誤差に関する初期化操作のヤコビアン	66
<b>7</b>	<b>グローバル角度誤差を用いた ESKF</b>	<b>67</b>
7.1	連続時間におけるシステムキネマティクス	67
7.1.1	真の状態とノミナル状態のキネマティクス	67
7.1.2	誤差状態のキネマティクス	67
7.2	離散時間におけるシステムキネマティクス	69
7.2.1	ノミナル状態	69
7.2.2	誤差状態	70
7.2.3	誤差状態のヤコビアンと摂動行列	70
7.3	IMU と補完するセンサデータとの組み合わせ	70
7.3.1	誤差状態の観測	71
7.3.2	観測した誤差をノミナル状態に反映し計算する	71
7.3.3	ESKF を初期化する	71

<b>A</b>	<b>ルンゲ=クッタ法</b>	<b>73</b>
A.1	オイラー法 . . . . .	74
A.2	中点法 . . . . .	74
A.3	4次ルンゲ=クッタ法 . . . . .	74
A.4	一般的なルンゲ=クッタ法 . . . . .	75
<b>B</b>	<b>閉形式の積分方法</b>	<b>76</b>
B.1	角度誤差の積分 . . . . .	76
B.2	単純化されたIMUの例 . . . . .	77
B.3	完全なIMUの例 . . . . .	80
<b>C</b>	<b>切り捨てによる近似方法</b>	<b>83</b>
C.1	システムの切り捨て . . . . .	83
C.1.1	一次切り捨て: 有限差分法 . . . . .	83
C.1.2	N次切り捨て . . . . .	84
C.2	ブロック的な切り捨て . . . . .	85
<b>D</b>	<b>ルンゲ=クッタ積分による遷移行列</b>	<b>86</b>
D.1	誤差状態の例 . . . . .	87
<b>E</b>	<b>ランダムノイズと摂動の積分</b>	<b>88</b>
E.1	ノイズと摂動インパルス . . . . .	91
E.2	完全なIMUの例 . . . . .	92
E.2.1	ノイズ、摂動インパルス . . . . .	92

## Abstract

本稿では、3次元空間におけるクォータニオンおよび回転に関する概念と公式、および誤差状態カルマンフィルタなどの推定手法における適切な使用法について、網羅的に記述した。3次元回転とそのリー構造については、クォータニオンおよび回転行列の両方を用いた定式化により解説している。特に微小回転、微分、積分の定義は、詳細に記述する。また、3次元回転のメカニズムを把握するために、多くの直観的な理解や幾何学的な解釈を述べる。本稿の目的は慣性計測装置 (IMU) の出力の積分を利用する実利用に適した誤差状態カルマンフィルタの正確な定式化を理解することである。

(翻訳者より) 本稿の翻訳は東京大学工学系研究科航空宇宙工学専攻の森田の監修のもと、有志の学生達によって成された。翻訳に際しては原文のニュアンスをできる限り尊重するように努めたが、日本語での表現に沿うように意識した部分がある。

# 1 クォータニオンの定義と性質

## 1.1 クォータニオンの定義

私が見つけた中で最も興味深いクォータニオンの導入は Cayley-Dickson によるものである。二つの複素数  $A = a + bi$  と  $C = c + di$  があるとすると、この時  $Q = A + Cj$  を構成し  $k \triangleq ij$

を定義したときクォータニオン空間  $\mathbb{H}$  における元が得られる.

$$Q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}, \quad (1)$$

$\{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$  を実数,  $\{i, j, k\}$  を 3 つの虚数単位として以下を満たすように定義される.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (2a)$$

ここから, 以下を導き出すことができる

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \quad (2b)$$

(1) から複素数, 故に実数と虚数をクォータニオン定義に含めることができ, つまりは実数, 虚数, 複素数はクォータニオンの部分空間であることが分かる.

$$Q = a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}, \quad Q = bi \in \mathbb{I} \subset \mathbb{H}, \quad Q = a + bi \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \quad (3)$$

同様に, 完備性のため, クォータニオン空間  $\mathbb{H}$  の 3 次元虚数部分空間内の元を定義することができる. これを純クォータニオンと呼び, 純クォータニオン空間  $\mathbb{H}_p = \text{Im}(\mathbb{H})$  は以下のように書ける.

$$Q = bi + cj + dk \in \mathbb{H}_p \subset \mathbb{H} \quad (4)$$

単位長  $\mathbf{z} = e^{i\theta}$  の通常の複素数は複素積  $\mathbf{x}' = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}$  を用いて 2 次元平面上の回転を表すが, 単位長  $\mathbf{q} = e^{(u_x i + u_y j + u_z k)\theta/2}$  の「拡張複素数」またはクォータニオンは 2 つのクォータニオン積  $\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$  を用いて 3 次元空間上の回転を表現することに注目すべきである.

**注意:** すべてのクォータニオン定義が同じというわけではない. ある著者は積を  $ib$  ではなく  $bi$  と書き, そのため  $k = ji = -ij$  という性質が得られ,  $ijk = 1$  となり左巻きのクォータニオンとなる. また, 実部を末尾の位置に置き,  $Q = ia + jb + kc + d$  とする場合もある. これらの選択は基本的に意味の違いを持たないが, 細部において定式化全体を異なったものにしてしまう.

**注意:** この他にも, 定式化の細部を異なるものにする規則がある. それらは, 回転ベクトルや回転参照フレームといった回転演算子に与える「意味」や「解釈」に関するもので, 本質的には反対の操作を構成するものである.

**補足:** 上記の様々な規則のうち, 本書では, 定義 (2) が最も顕著な性質を持つハミルトン規則に焦点を当てる.

これらの詳細は Section 3 を参照されたい.

### 1.1.1 クォータニオンに関する別の表現

実数と虚数の表現  $\{1, i, j, k\}$  は、我々の目的に対して常に便利というわけではない。式 2 を用いると、クォータニオンはスカラーとベクトルの和として表現できる。

$$Q = q_w + q_x i + q_y j + q_z k \quad \Leftrightarrow \quad Q = q_w + \mathbf{q}_v \quad (5)$$

ここで  $q_w$  を実部またはスカラー部と呼び、 $\mathbf{q}_v = q_x i + q_y j + q_z k = (q_x, q_y, q_z)$  を虚部またはベクトル部と呼ぶ。

<sup>1</sup>また、スカラー部とベクトル部をそれぞれ並べて定義することもできる。

$$Q = \langle q_w, \mathbf{q}_v \rangle \quad (6)$$

本稿では特別な場合を除いて  $Q$  は 4 要素ベクトルとして表現する。

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \quad (7)$$

この表現を用いればクォータニオンを含む演算に線形代数を使用することができる。時に“=”の記号を乱用して表記を混在させる場合がある。その典型例が実クォータニオンと純クォータニオンである。

$$\begin{aligned} \text{一般的なクォータニオン: } \mathbf{q} &= q_w + \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{H}, \\ \text{実クォータニオン: } q_w &= \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}, \\ \text{純クォータニオン: } \mathbf{q}_v &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_p \end{aligned} \quad (8)$$

## 1.2 クォータニオンの主な性質

### 1.2.1 和

和は自明である。

$$\mathbf{p} \pm \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_w \pm q_w \\ \mathbf{p}_v \pm \mathbf{q}_v \end{bmatrix}. \quad (9)$$

定義上、和は交換法則と結合法則を満たす。

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{p} \quad (10)$$

$$\mathbf{p} + (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{r}. \quad (11)$$

<sup>1</sup> $(w, x, y, z)$  の添え字表記を選択したのは、3次元デカルト空間におけるクォータニオンの幾何学的性質に興味があるからである。他のテキストでは、 $(0, 1, 2, 3)$  や  $(1, i, j, k)$  などの別の添え字を使うことが多く、おそらく数学的解釈にはより適しているのだろう。

### 1.2.2 クォータニオン積

クォータニオン積は  $\otimes$  で表され, (1) の表現と (2) を用いる必要がある. クォータニオン積をベクトル表記すると以下のようなものである.

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w q_w - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z \\ p_w q_x + p_x q_w + p_y q_z - p_z q_y \\ p_w q_y - p_x q_z + p_y q_w + p_z q_x \\ p_w q_z + p_x q_y - p_y q_x + p_z q_w \end{bmatrix} \quad (12)$$

クォータニオン積はスカラー部とベクトル部を用いて以下のようにも表現できる.

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_w q_w - \mathbf{p}_v^\top \mathbf{q}_v \\ p_w \mathbf{q}_v + q_w \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで, 外積が含まれていることからわかるようにクォータニオン積は一般的に交換法則を満たさない.

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \neq \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} \quad (14)$$

交換法則を満たす場合は  $\mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v = 0$  に限られる. これは一方のクォータニオンが実数の場合, または両方のベクトル部が平行な場起こる.

しかしながら, クォータニオン積は常に結合法則を満たす.

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}) \quad (15)$$

そして和に関する分配法則も常に満たす.

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \quad (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{r} \quad (16)$$

二つのクォータニオン積はそれぞれに対して線形であり, 以下のような行列積と等価である.

$$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = [\mathbf{q}_1]_L \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = [\mathbf{q}_2]_R \mathbf{q}_1 \quad (17)$$

ここで  $[\mathbf{q}]_L$  と  $[\mathbf{q}]_R$  は左側と右側のクォータニオン積行列であり, (12) と (17) から簡単に導ける.

$$[\mathbf{q}]_L = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & q_w & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix} \quad [\mathbf{q}]_R = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & q_z & -q_y \\ q_y & -q_z & q_w & q_x \\ q_z & q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix} \quad (18)$$

もしくはより簡単に, (13) と (17) から

$$[\mathbf{q}]_L = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & [\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix} \quad [\mathbf{q}]_R = q_w \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & -[\mathbf{q}_v]_\times \end{bmatrix} \quad (19)$$

ここで、歪対称演算子  $[\bullet]_{\times}$  は以下の外積行列を生成する.<sup>2</sup>

$$[\mathbf{a}]_{\times} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

これは歪対称行列  $[\mathbf{a}]_{\times}^{\top} = -[\mathbf{a}]_{\times}$  であり、外積と等価である.

$$[\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad (21)$$

最後に

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{p} &= (\mathbf{q} \otimes \mathbf{x}) \otimes \mathbf{p} = [\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L \mathbf{x} \\ &= \mathbf{q} \otimes (\mathbf{x} \otimes \mathbf{p}) = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R \mathbf{x} \end{aligned}$$

であるから、以下の関係が導ける

$$[\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R \quad (22)$$

つまり、左側と右側のクォータニオン積行列は可換である。これらの行列のより詳しい性質は Section 2.8 にて述べる。

積演算  $\otimes$  を持つクォータニオンは、非可換群を形成する。この群の要素である恒等クォータニオン (写像)  $\mathbf{q}_1 = 1$  と逆クォータニオン (写像)  $\mathbf{q}^{-1}$  を以下に述べる。

### 1.2.3 恒等クォータニオン

クォータニオン積に関する恒等性を有する恒等クォータニオン  $\mathbf{q}_1$  は  $\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$  を満たすようなものである。これはすなわち実数での掛け算における '1' をクォータニオンで表すものである。

$$\mathbf{q}_1 = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix}$$

### 1.2.4 共役

共役クォータニオンは以下のように定義する。

$$\mathbf{q}^* \triangleq q_w - \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_w \\ -\mathbf{q}_v \end{bmatrix} \quad (23)$$

これは以下の性質を持つ。

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p}^* \quad (25)$$

<sup>2</sup>歪対称演算子  $[\bullet]_{\times}$  は文献にさまざまな名前や表現で出現する。外積演算子  $\times$  やハット演算子  $\hat{\phantom{a}}$  のどちらかに関連している。下に述べた表現はすべて等価である。

$$[\mathbf{a}]_{\times} \equiv [\mathbf{a}_{\times}] \equiv \mathbf{a} \times \equiv \mathbf{a}_{\times} \equiv [\mathbf{a}] \equiv \hat{\mathbf{a}} \equiv \mathbf{a}^{\wedge}$$

### 1.2.5 ノルム

クォータニオンのノルムは以下のように定義する.

$$\|\mathbf{q}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*} = \sqrt{\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}} = \sqrt{q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} \in \mathbb{R} \quad (26)$$

これは以下の性質を持つ.

$$\|\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}\| = \|\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|. \quad (27)$$

### 1.2.6 逆クォータニオン

逆クォータニオン  $\mathbf{q}^{-1}$  はあるクォータニオンとの積が恒等クォータニオンとなるものである.

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q}_1. \quad (28)$$

逆クォータニオンは以下の式で計算できる.

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* / \|\mathbf{q}\|^2 \quad (29)$$

### 1.2.7 単位 (正規化) クォータニオン

単位クォータニオンはそのノルムが1となり ( $\|\mathbf{q}\| = 1$ ), 以下の関係が成り立つ

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* \quad (30)$$

単位クォータニオンを姿勢表現もしくは回転演算子として解釈する場合, 上記の性質から共役クォータニオンを用いて逆回転を実行できる. 単位クォータニオンは常に次式で記述される.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \mathbf{u} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで  $\mathbf{u} = u_x i + u_y j + u_z k$  は単位ベクトルであり,  $\theta$  はスカラーである.

式 (27) より, 積演算を与えられた単位クォータニオンは非可換群を構成できる. この非可換群において逆クォータニオンと共役クォータニオンは一致する.

## 1.3 さらにクォータニオンの性質

### 1.3.1 クォータニオン交換子

クォータニオン交換子は次のように定義され  $[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \triangleq \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}$  式 (13) より以下が成り立つ.

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = 2 \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \quad (32)$$

上記は以下の関係を意味し, この性質は後ほど利用する.

$$\mathbf{p}_v \otimes \mathbf{q}_v - \mathbf{q}_v \otimes \mathbf{p}_v = 2 \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \quad (33)$$

### 1.3.2 純クォータニオン積

純クォータニオンは実部を持たない，すなわちスカラー部を持たないクォータニオンであり  $Q = \mathbf{q}_v$  もしくは  $\mathbf{q} = [0, \mathbf{q}_v]$  である。式 (13) より純クォータニオン同士の積は次式となる。

$$\mathbf{p}_v \otimes \mathbf{q}_v = -\mathbf{p}_v^\top \mathbf{q}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}_v^\top \mathbf{q}_v \\ \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \quad (34)$$

これより

$$\mathbf{q}_v \otimes \mathbf{q}_v = -\mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v = -\|\mathbf{q}_v\|^2, \quad (35)$$

また，純ユニタリクォータニオン  $\mathbf{u} \in \mathbb{H}_p$ ,  $\|\mathbf{u}\| = 1$  では以下が言える。

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = -1 \quad (36)$$

これは虚数の標準的な性質  $i \cdot i = -1$  と類似している。

### 1.3.3 純クォータニオンの自然数による乗算

クォータニオン  $\mathbf{q}$  の積演算  $\otimes$  を用いた  $n$  乗を次のように定義する  $\mathbf{q}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , この時  $\mathbf{v}$  が純クォータニオンであれば  $\mathbf{v} = \mathbf{u}\theta$ , 但し  $\theta = \|\mathbf{v}\| \in \mathbb{R}$ , また， $\mathbf{u}$  をユニタリクォータニオンとして，式 (35) より次の周期的な式を得る。

$$\mathbf{v}^2 = -\theta^2, \quad \mathbf{v}^3 = -\mathbf{u}\theta^3, \quad \mathbf{v}^4 = \theta^4, \quad \mathbf{v}^5 = \mathbf{u}\theta^5, \quad \mathbf{v}^6 = -\theta^6, \quad \dots \quad (37)$$

さらに純ユニタリクォータニオン  $\mathbf{u}$  に対しては以下のように簡単になる。

$$\mathbf{u}^2 = -1, \quad \mathbf{u}^3 = -\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^4 = 1, \quad \mathbf{u}^5 = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^6 = -1, \quad \dots \quad (38)$$

### 1.3.4 純クォータニオンの指数関数

クォータニオンによる指数関数は従来の指数関数と類似した関数であり，実数の指数関数と同様に絶対収束するべき級数として定義される。

$$e^{\mathbf{q}} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{q}^k \in \mathbb{H}. \quad (39)$$

明らかにクォータニオン実部の指数関数は従来の指数関数と同様である。より重要なのは純クォータニオン  $\mathbf{v} = v_x i + v_y j + v_z k$  の指数関数は次で定義される新しいクォータニオンとなる事である。

$$e^{\mathbf{v}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{v}^k \in \mathbb{H} \quad (40)$$

ここで  $\mathbf{v} = \mathbf{u}\theta$  かつ  $\theta = \|\mathbf{v}\| \in \mathbb{R}$  として  $\mathbf{u}$  がユニタリクォータニオンとした場合、式 (37) を考慮すると式 (40) に現れる項をスカラーとベクトルのグループに分ける事が出来る。

$$e^{\mathbf{u}\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + \left(\mathbf{u}\theta - \frac{\mathbf{u}\theta^3}{3!} + \frac{\mathbf{u}\theta^5}{5!} + \dots\right) \quad (41)$$

各グループの  $\theta$  関数はそれぞれ  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  となっていることが分かる。<sup>3</sup>

以上から次式が言える。

$$e^{\mathbf{v}} = e^{\mathbf{u}\theta} = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \mathbf{u} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (42)$$

これは虚数で構成されたオイラー公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  の美しい拡張である。次の式  $\|e^{\mathbf{v}}\|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  が成り立つので純クォータニオンの指数関数は単位クォータニオンである。単位クォータニオンであることから以下の性質も持つ。

$$e^{-\mathbf{v}} = (e^{\mathbf{v}})^* \quad (43)$$

小さな角度のクォータニオンではクォータニオン正規化演算  $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$  の際にゼロ除算を回避するためにテイラー展開された  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  関数と数値的な切り捨てを利用して、様々な精度の近似式を得る。

$$e^{\mathbf{v}} \approx \begin{bmatrix} 1 - \theta^2/2 \\ \mathbf{v}(1 - \theta^2/6) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (44)$$

### 1.3.5 一般クォータニオンの指数関数

クォータニオン積の非可換性から一般クォータニオン  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{q}$  に対して  $e^{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = e^{\mathbf{p}}e^{\mathbf{q}}$  と記述する事は出来ないが、スカラーに対する積であれば可換性が保持されるので以下のように記述できる。

$$e^{\mathbf{q}} = e^{q_w + \mathbf{q}_v} = e^{q_w} e^{\mathbf{q}_v} \quad (45)$$

さらに式 (42) を  $\mathbf{u}\theta = \mathbf{q}_v$  として適用する事で次の式を得る。

$$e^{\mathbf{q}} = e^{q_w} \begin{bmatrix} \cos \|\mathbf{q}_v\| \\ \frac{\mathbf{q}_v}{\|\mathbf{q}_v\|} \sin \|\mathbf{q}_v\| \end{bmatrix} \quad (46)$$

### 1.3.6 単位クォータニオンの対数関数

$\|\mathbf{q}\| = 1$  である時 (つまり  $\mathbf{q}$  が単位クォータニオンである時), 明らかに以下が成り立つ。

$$\log \mathbf{q} = \log(\cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta) = \log(e^{\mathbf{u}\theta}) = \mathbf{u}\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}\theta \end{bmatrix} \quad (47)$$

<sup>3</sup> $\cos \theta = 1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \dots$ ,  $\sin \theta = \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \dots$ .

従って、単位クォータニオンの対数関数は常に純クォータニオンとなる。角度・軸パラメータは式 (42) を逆に解く事で得られる次式で容易に求める事が出来る。

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}_v / \|\mathbf{q}_v\| \quad (48)$$

$$\theta = \arctan(\|\mathbf{q}_v\|, q_w) \quad (49)$$

小さな角度のクォータニオンではゼロ除算を回避するために  $\arctan(x)$  のテイラー展開と数値的な切り捨てを用いて様々な精度の近似式を得る。<sup>4</sup>

$$\log(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\theta = \mathbf{q}_v \frac{\arctan(\|\mathbf{q}_v\|, q_w)}{\|\mathbf{q}_v\|} \approx \frac{\mathbf{q}_v}{q_w} \left(1 - \frac{\|\mathbf{q}_v\|^2}{3q_w^2}\right) \approx \mathbf{q}_v \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \mathbf{0} \quad (50)$$

### 1.3.7 一般クォータニオンの対数関数

これまでの対数関数の議論を一般クォータニオンに拡張して次式を得る。

$$\log \mathbf{q} = \log(\|\mathbf{q}\| \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}) = \log \|\mathbf{q}\| + \log \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \log \|\mathbf{q}\| + \mathbf{u}\theta = \begin{bmatrix} \log \|\mathbf{q}\| \\ \mathbf{u}\theta \end{bmatrix} \quad (51)$$

### 1.3.8 $\mathbf{q}^t$ 形式に対する指数関数

あるクォータニオン  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$  と実数  $t \in \mathbb{R}$  について以下の関数を考える。

$$\mathbf{q}^t = \exp(\log(\mathbf{q}^t)) = \exp(t \log(\mathbf{q})) \quad (52)$$

仮に  $\|\mathbf{q}\| = 1$  となる時、 $\mathbf{q} = [\cos \theta, \mathbf{u} \sin \theta]$  と記述でき、さらに  $\log(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\theta$  であるから最終的に以下の式が言える。

$$\mathbf{q}^t = \exp(t \mathbf{u}\theta) = \begin{bmatrix} \cos t\theta \\ \mathbf{u} \sin t\theta \end{bmatrix} \quad (53)$$

指数  $t$  は結局のところ角度  $\theta$  の線形乗数となるため、線形角度補間要素とみなすことが出来る。このアイデアについては Section 2.7 にて詳細を述べる。

## 2 回転と相互関係

### 2.1 三次元ベクトル回転公式

図 1 に示したのは、右手則に従って、一般の 3 次元ベクトル  $\mathbf{x}$  を単位ベクトル  $\mathbf{u}$  で定義される軸を中心として角度  $\phi$  だけ回転する様子である。この回転を考えるために、ベクトル  $\mathbf{x}$  を  $\mathbf{u}$  に平行な成分  $\mathbf{x}_{\parallel}$  と  $\mathbf{u}$  に直交する成分  $\mathbf{x}_{\perp}$  に分解すると、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$$

<sup>4</sup> $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - \dots$ ,  $\arctan(y, x) \equiv \arctan(y/x)$ .

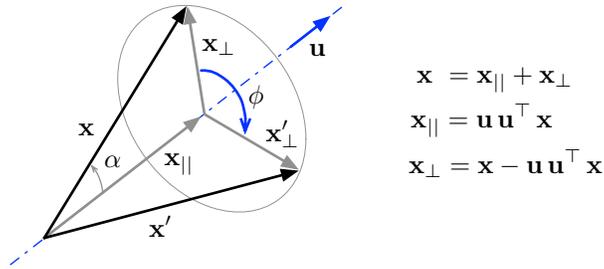


Figure 1: ベクトル  $\mathbf{x}$  の、軸ベクトル  $\mathbf{u}$  周りの、角度  $\phi$  の回転

となる。

これらの成分は簡単に計算できて、( $\alpha$  をベクトル  $\mathbf{x}$  と軸  $\mathbf{u}$  の間の角度として、)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{||} &= \mathbf{u} (\|\mathbf{x}\| \cos \alpha) = \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_{\perp} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_{||} = \mathbf{x} - \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{x}\end{aligned}$$

となる。

回転の際に、平行な成分は回転しないから、

$$\mathbf{x}'_{||} = \mathbf{x}_{||}$$

であり、直交する成分は  $\mathbf{u}$  に垂直な平面で二次元回転を経る。つまり、この平面上に以下のような直交基底  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  を用意して

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{x}_{\perp} \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{u} \times \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{u} \times \mathbf{x}\end{aligned}$$

これらが  $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\|$  を満たすようにすれば、 $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{e}_1 \cdot 1 + \mathbf{e}_2 \cdot 0$  となる。この平面上での角度  $\phi$  の回転により、

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{e}_1 \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \phi$$

が得られる。そこから以下が導かれる。

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \cos \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi$$

平行成分も足し合わせることで、回転後のベクトル  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_{||} + \mathbf{x}'_{\perp}$  の以下のような表現形を得ることができる。これはベクトル回転公式として知られている。

$$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{||} + \mathbf{x}_{\perp} \cos \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi} \quad (54)$$

## 2.2 回転群 $SO(3)$

$\mathbb{R}^3$  において、回転群  $SO(3)$  は合成の演算における原点まわりの回転の群である。回転はベクトルの長さや相対的なベクトルの方向 (*i.e.*, 右手系・左手系) を保存する一次変換である。ロボット工学においてこの回転群が重要であるのは、それが三次元空間における剛体の回転を表すからである。剛体運動では、剛体内部での距離、角度、相対的な方向が運動の際に保存されることが必須である。そうでない場合、つまりノルム、角度、相対的な方向が保たれないのであれば、その物体を剛体とみなすことができない。

それではこれらの特性を満足する演算子を用いて回転を定義しよう。ベクトル  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  に作用する回転演算子  $r: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \mathbf{v} \mapsto r(\mathbf{v})$  はユークリッド空間の尺度で定義でき、内積と外積で構成され、以下のようなになる。

- 回転はベクトルのノルムを保存する

$$\|r(\mathbf{v})\| = \sqrt{\langle r(\mathbf{v}), r(\mathbf{v}) \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \triangleq \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \quad (55a)$$

- 回転はベクトル間の角度を保存する

$$\langle r(\mathbf{v}), r(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \alpha, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \quad (55b)$$

- 回転はベクトルの相対的な方向を保存する

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \iff r(\mathbf{u}) \times r(\mathbf{v}) = r(\mathbf{w}). \quad (56)$$

最初の2つの条件が等価であることは簡単に証明される。従って、回転群  $SO(3)$  を以下のように定義することができる。

$$SO(3) : \{r: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, \|r(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, r(\mathbf{v}) \times r(\mathbf{w}) = r(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\} \quad (57)$$

回転群は典型的には回転行列の集合によって表される。しかし、クォータニオンも回転群の良い表現形式である。この章の目標は、この両方の表し方が同等に有効であると示すことである。両者は概念的にも代数的にも多くの類似点を示す。それは表1から分かる通りである。

両者の最も重要な違いは単位クォータニオン群が  $SO(3)$  の二重被覆になっている (つまり厳密に言うと  $SO(3)$  そのものではない) という点かもしれないが、この違いは我々が利用する際には重要ではないことが多い。<sup>5</sup>表は、比較や評価を素早く行えるように、先に挿入してある。回転行列とクォータニオンによる  $SO(3)$  の表現は、ここから先の節で詳しく見ていく。

<sup>5</sup>二重被覆の影響を考慮しなければいけないのは、回転を行う空間で補間を行うときである。ただし、2.7節で見ると、これは簡単である。

Table 1:  $SO(3)$  を表現するための回転行列とクォータニオン

	回転行列 $\mathbf{R}$	クォータニオン $\mathbf{q}$
パラメータ	$3 \times 3 = 9$	$1 + 3 = 4$
自由度	3	3
束縛条件	$9 - 3 = 6$	$4 - 3 = 1$
束縛条件	$\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I} ; \det(\mathbf{R}) = +1$	$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = 1$
常微分方程式	$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} [\boldsymbol{\omega}]_\times$	$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}$
指数写像	$\mathbf{R} = \exp([\mathbf{u}\phi]_\times)$	$\mathbf{q} = \exp(\mathbf{u}\phi/2)$
対数写像	$\log(\mathbf{R}) = [\mathbf{u}\phi]_\times$	$\log(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\phi/2$
$SO(3)$ との関係	一重被覆	二重被覆
単位元	$\mathbf{I}$	1
逆元	$\mathbf{R}^\top$	$\mathbf{q}^*$
合成	$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$	$\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2$
回転演算子	$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi [\mathbf{u}]_\times + (1 - \cos \phi) [\mathbf{u}]_\times^2$	$\mathbf{q} = \cos \phi/2 + \mathbf{u} \sin \phi/2$
回転作用	$\mathbf{R} \mathbf{x}$	$\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$
補間	$\mathbf{R}^t = \mathbf{I} + \sin t\phi [\mathbf{u}]_\times + (1 - \cos t\phi) [\mathbf{u}]_\times^2$ $\mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_2)^t$	$\mathbf{q}^t = \cos t\phi/2 + \mathbf{u} \sin t\phi/2$ $\mathbf{q}_1 \otimes (\mathbf{q}_1^* \otimes \mathbf{q}_2)^t$ $\mathbf{q}_1 \frac{\sin((1-t)\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} + \mathbf{q}_2 \frac{\sin(t\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)}$
相互関係	$\mathbf{R}\{\mathbf{q}\} = (q_w^2 - \mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v) \mathbf{I} + 2 \mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^\top + 2 q_w [\mathbf{q}_v]_\times$ $\mathbf{R}\{-\mathbf{q}\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}$ $\mathbf{R}\{1\} = \mathbf{I}$ $\mathbf{R}\{\mathbf{q}^*\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}^\top$ $\mathbf{R}\{\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}_1\} \mathbf{R}\{\mathbf{q}_2\}$ $\mathbf{R}\{\mathbf{q}^t\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}^t$	二重被覆 単位行列 逆行列 合成 補間

## 2.3 回転群と回転行列

演算子  $r()$  は線形である。線形なスカラーとベクトルの積から定義されるからだ。それゆえ、演算子  $r()$  は行列  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  で表現され、この行列をベクトル  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  に掛けることで回転を生成する。

$$r(\mathbf{v}) = \mathbf{R}\mathbf{v} \quad (58)$$

(55a) に代入し、内積が  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$  であることを利用して展開すると、任意の  $\mathbf{v}$  に対して以下を得る。

$$(\mathbf{R}\mathbf{v})^\top (\mathbf{R}\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{v} = \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \quad (59)$$

そして  $\mathbf{R}$  について直行条件が導かれる。

$$\boxed{\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I} = \mathbf{R} \mathbf{R}^\top} \quad (60)$$

上記の条件は確かに直交の条件であり、それは  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]$  として上式に代入すると  $\mathbf{R}$  の列ベクトル  $\mathbf{r}_i$  (ただし  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) が単位長さを持ち互いに直交であることから確認できる。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i \rangle &= \mathbf{r}_i^\top \mathbf{r}_i = 1 \\ \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle &= \mathbf{r}_i^\top \mathbf{r}_j = 0, \quad \text{if } i \neq j \end{aligned}$$

ベクトルのノルムと角度を保存する変換の集合は上記の理由により直交群と呼ばれ、 $O(3)$  で表される。直交群には回転 (すなわち剛体運動である) と鏡映 (これは剛体運動ではない) が含まれる。ここでの群とは本質的に (そして非公式に) 2つの直交行列の積が必ず直交行列であり、<sup>6</sup>各直交行列が逆行列を持つということを意味する。実は、直交条件 (60) は、逆回転が転置行列によって求められることを示唆している。

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top. \quad (61)$$

相対的な方向の条件 (56) を合わせると剛体運動が保証され (つまり鏡映は無視する)、 $\mathbf{R}$  についてさらにもう1つの拘束が課せられる。<sup>7</sup>

$$\boxed{\det(\mathbf{R}) = 1} \quad (62)$$

<sup>6</sup> $\mathbf{Q}_1$  と  $\mathbf{Q}_2$  を直交であるとして、 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$  を定めると、 $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2^\top \mathbf{Q}_1^\top \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^\top \mathbf{I} \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$  である。

<sup>7</sup>鏡映は  $|\mathbf{R}| = \det(\mathbf{R}) = -1$  を満たし、 $|\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2| = 1 \neq -1$  であるから群を形成しないことに注意されたい。

正の単位行列式を持つ直交行列は一般に**プロパー**あるいは**特殊**と言われる。そのような特殊直交行列の集合は**特殊直交群**  $SO(3)$  と呼ばれる  $O(3)$  の下位群である。群であるから、2つの回転行列の積は常に回転行列である。<sup>8</sup>

### 2.3.1 指数写像

指数写像(と次の節で扱う対数写像)は回転を行う三次元空間で簡単かつ厳密に計算を行うのに強力な数学的手段である。それは、回転空間に適した無限小の計算法の文献への入り口となっている。指数写像のおかげで微分、摂動、速度を正確に定義し、取り扱うことができる。それゆえに、回転や姿勢の空間における推定問題で重要である。

回転は剛体運動である。この剛性から分かるのは、最初の位置  $r(0)$  から現在の位置  $r(t)$  まで剛体を連続的に回転させている、 $SO(3)$  内の連続的な軌道あるいは**軌跡**  $r(t)$  を定義することが可能であるということだ。連続的であるから、そのような変換の時間微分を調べることは妥当である。私たちがそのようにして(60)や(62)の性質を導き出したのは、先ほど見た通りである。

まず初めに、(60)を満たしながら行列式が1となる条件(62)から逃れ続けることが不可能であると分かる。なぜなら、もしそれが可能であれば行列式が+1から-1に飛躍することになってしまうからだ。<sup>9</sup>従って、直交条件(60)の時間微分を調べるだけで良い。それを書き下すと、

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}^\top \mathbf{R}) = \dot{\mathbf{R}}^\top \mathbf{R} + \mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}} = 0 \quad (63)$$

すると、

$$\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}} = -(\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}})^\top \quad (64)$$

が成り立ち、行列  $\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}}$  が歪対称である (*i.e.* 転置して符号を逆にすると元の行列に等しくなる)ことを意味する。歪対称な  $3 \times 3$  行列の集合は  $\mathfrak{so}(3)$  と書かれ、 $SO(3)$  の**リー代数**の名を冠している。歪対称な  $3 \times 3$  行列は以下のような形をしている。

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

3自由度を持ち、(20)で既に導入した外積行列に対応している。これは、1対1の写像  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \in \mathfrak{so}(3)$  を確立する。それではベクトル  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \in \mathbb{R}^3$  を用いて

$$\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \quad (66)$$

<sup>8</sup>脚注6を参照すると、 $SO(3)$  に対して以下も成り立つ:  $|\mathbf{R}_1| = |\mathbf{R}_2| = 1$  として、 $|\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2| = |\mathbf{R}_1| |\mathbf{R}_2| = 1$  である。

<sup>9</sup>別の言い方をすれば、連続的な変換を経て回転が鏡映になることはあり得ない。

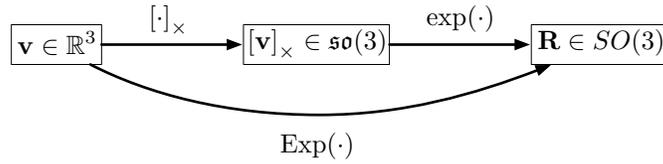


Figure 2: 回転行列の指数写像.

と書くことにしよう. ここから常微分方程式 (ODE) が得られる.

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \quad (67)$$

初期値付近では,  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  が仮定でき, 上記の方程式は  $\dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega}]_{\times}$  のように簡単になる. それゆえ, リー代数  $so(3)$  を原点における  $r(t)$  の導関数の空間と解釈することができる. それは  $SO(3)$  に対する**正接空間**もしくは**速度空間**である. これらの事実から,  $\boldsymbol{\omega}$  を瞬間的な角速度ベクトルと呼ぶことが十分に可能である.

$\boldsymbol{\omega}$  が一定であれば, 上記の微分方程式は時間積分することができて,

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) e^{[\boldsymbol{\omega}]_{\times} t} = \mathbf{R}(0) e^{[\boldsymbol{\omega} t]_{\times}} \quad (68)$$

となる. ここで指数関数  $e^{[x]_{\times}}$  は, 後の節でみるように, テイラー級数から定義される.  $\mathbf{R}(0)$  と  $\mathbf{R}(t)$  が回転行列であるから, 明らかに  $e^{[\boldsymbol{\omega} t]_{\times}} = \mathbf{R}(0)^{\top} \mathbf{R}(t)$  も回転行列である. ベクトル  $\boldsymbol{\phi} \triangleq \boldsymbol{\omega} \Delta t$  を  $\Delta t$  間の回転全てをまとめこんだ回転ベクトルと定めると,

$$\boxed{\mathbf{R} = e^{[\boldsymbol{\phi}]_{\times}}} \quad (69)$$

を得る. これは指数写像と呼ばれており,  $so(3)$  から  $SO(3)$  へと作用するものである.

$$\exp : so(3) \rightarrow SO(3) ; [\boldsymbol{\phi}]_{\times} \mapsto \exp([\boldsymbol{\phi}]_{\times}) = e^{[\boldsymbol{\phi}]_{\times}} . \quad (70)$$

### 2.3.2 大文字の指数写像

指数写像はしばしば誤った表記をされることがある. つまり  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3$  のことを  $[\boldsymbol{\phi}]_{\times} \in so(3)$  と混同することである. 曖昧さが生じ得るのを回避するため, 新たに適用する  $\mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$  を大文字で始まる  $\text{Exp}$  を用いた明白な表記で以下のように書くことにする. (Fig. 2 参照)

$$\text{Exp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3) ; \boldsymbol{\phi} \mapsto \text{Exp}(\boldsymbol{\phi}) = e^{[\boldsymbol{\phi}]_{\times}} \quad (71)$$

これと (小文字で始まる) 指数写像の関係は自明であり,

$$\text{Exp}(\phi) \triangleq \exp([\phi]_{\times}) \quad (72)$$

この後の節で、回転ベクトルあるいは角度-軸ベクトルと呼ばれる  $\phi$  が  $\phi = \omega \Delta t = \phi \mathbf{u}$  のように角度  $\phi$  と回転の軸  $\mathbf{u}$  で表されることを見ていく。

### 2.3.3 回転行列と回転ベクトル：ロドリゲス回転公式

回転行列は (69) の指数写像を用いて回転ベクトル  $\phi = \phi \mathbf{u}$  から定義され、外積行列  $[\phi]_{\times} = \phi [\mathbf{u}]_{\times}$  は (20) で定義されている通りである。  $\phi = \phi \mathbf{u}$  としたときに (69) のテイラー展開は

$$\mathbf{R} = e^{\phi[\mathbf{u}]_{\times}} = \mathbf{I} + \phi [\mathbf{u}]_{\times} + \frac{1}{2} \phi^2 [\mathbf{u}]_{\times}^2 + \frac{1}{3!} \phi^3 [\mathbf{u}]_{\times}^3 + \frac{1}{4!} \phi^4 [\mathbf{u}]_{\times}^4 + \dots \quad (73)$$

となる。これを単位ベクトル  $\mathbf{u}$  に適用するとき、行列  $[\mathbf{u}]_{\times}$  は以下を満たし、

$$[\mathbf{u}]_{\times}^2 = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\top} - \mathbf{I} \quad (74)$$

$$[\mathbf{u}]_{\times}^3 = -[\mathbf{u}]_{\times} \quad (75)$$

それゆえに  $[\mathbf{u}]_{\times}$  の累乗は全て  $[\mathbf{u}]_{\times}$  と  $[\mathbf{u}]_{\times}^2$  の項で表され、周期的なパターンを形成する。

$$[\mathbf{u}]_{\times}^4 = -[\mathbf{u}]_{\times}^2 \quad [\mathbf{u}]_{\times}^5 = [\mathbf{u}]_{\times} \quad [\mathbf{u}]_{\times}^6 = [\mathbf{u}]_{\times}^2 \quad [\mathbf{u}]_{\times}^7 = -[\mathbf{u}]_{\times} \quad \dots \quad (76)$$

ここで、 $[\mathbf{u}]_{\times}$  の項と  $[\mathbf{u}]_{\times}^2$  の項をまとめ、それらの中から  $\sin \phi$  と  $\cos \phi$  の級数をそれぞれ見つけ出すと、回転ベクトルから回転行列を得るための閉形式が導かれる。これがいわゆる**ロドリゲス回転公式**である。

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi [\mathbf{u}]_{\times} + (1 - \cos \phi) [\mathbf{u}]_{\times}^2} \quad (77)$$

これが先程  $\mathbf{R}\{\phi\} \triangleq \text{Exp}(\phi)$  と書いたものである。この公式にはいくつか他の表し方もあり、例えば式 (74) を使って、

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} \cos \phi + [\mathbf{u}]_{\times} \sin \phi + \mathbf{u}\mathbf{u}^{\top} (1 - \cos \phi) \quad (78)$$

とすることもできる。

### 2.3.4 対数写像

対数写像を、指数写像の逆写像として定義する.

$$\log : SO(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3) ; \mathbf{R} \mapsto \log(\mathbf{R}) = [\mathbf{u} \phi]_{\times} \quad (79)$$

ただし,

$$\phi = \arccos \left( \frac{\text{trace}(\mathbf{R}) - 1}{2} \right) \quad (80)$$

$$\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}^{\top})^{\vee}}{2 \sin \phi} \quad (81)$$

とする. ここで,  $\bullet^{\vee}$  は  $[\bullet]_{\times}$  の逆, つまり  $([\mathbf{v}]_{\times})^{\vee} = \mathbf{v}$  と  $[\mathbf{V}^{\vee}]_{\times} = \mathbf{V}$  ということである. 大文字で始まるバージョンの Log も定義し, 回転行列から直接  $\phi = \mathbf{u} \phi \in \mathbb{R}^3$  に戻すことができるようにする.

$$\text{Log} : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \mathbf{R} \mapsto \text{Log}(\mathbf{R}) = \mathbf{u} \phi \quad (82a)$$

これと (小文字で始まる) 対数写像の関係は自明であり,

$$\text{Log}(\mathbf{R}) \triangleq (\log(\mathbf{R}))^{\vee} \quad (83)$$

### 2.3.5 回転作用

単位長さの軸ベクトル  $\mathbf{u}$  の周りでベクトル  $\mathbf{x}$  を角度  $\phi$  だけ回転することは, 以下の線形な積で実現される.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R} \mathbf{x} \quad (84)$$

ここで  $\mathbf{R} = \text{Exp}(\mathbf{u} \phi)$  である. このことは, (77), (74), (75) を使って (84) を展開することで証明できる.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{R} \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{I} + \sin \phi [\mathbf{u}]_{\times} + (1 - \cos \phi) [\mathbf{u}]_{\times}^2) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} + \sin \phi [\mathbf{u}]_{\times} \mathbf{x} + (1 - \cos \phi) [\mathbf{u}]_{\times}^2 \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x} + \sin \phi (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) + (1 - \cos \phi) (\mathbf{u} \mathbf{u}^{\top} - \mathbf{I}) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp} + \sin \phi (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) - (1 - \cos \phi) \mathbf{x}_{\perp} \\ &= \mathbf{x}_{\parallel} + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi + \mathbf{x}_{\perp} \cos \phi \end{aligned} \quad (85)$$

これはちょうど, (54) のベクトル回転公式と同じものである.

## 2.4 回転群とクォータニオン

教育的な目的のために，回転群  $SO(3)$  の表現としての，クォータニオンと回転行列との関係を強調したい．そのために，よく知られているクォータニオンの回転作用の公式，

$$r(\mathbf{v}) = \mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^* \quad (86)$$

をここでまずは仮説として取り上げる．こう仮定すると，回転行列で用いたものと同じ論法でクォータニオンに関して記述できる．仮説の厳密性は少し後の Section 2.4.5 で証明され，このアプローチの妥当性が示される．

それでは上記の回転を直交条件 (55a) に代入し，(27) を用いて展開すると，

$$\|\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*\| = \|\mathbf{q}\|^2 \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| \quad (87)$$

となり， $\|\mathbf{q}\|^2 = 1$ ，つまりクォータニオンのノルムが1となる条件

$$\boxed{\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = 1 = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*} \quad (88)$$

が得られる．この条件は回転行列に対する条件， $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I} = \mathbf{R} \mathbf{R}^\top$  ((60) 参照) に類似している．読者諸君は少々立ち止まり，この類似性を確認するとよかろう．

同様に，相対的な方向が保存される条件 (56) が構成上満たされることを示す．(以下に示すように，(33) を2回使用する)．

$$\begin{aligned} r(\mathbf{v}) \times r(\mathbf{w}) &= (\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*) \times (\mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^*) \\ (33) \quad &= \frac{1}{2}((\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*) \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^*) - (\mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^*) \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*)) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{q} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{q}^* - \mathbf{q} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{q}^*) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{q} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{q}^*) \\ (33) \quad &= \mathbf{q} \otimes (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \otimes \mathbf{q}^* \\ &= r(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (89)$$

単位クォータニオンの集合は乗算の操作のもとで群を形成する．この群は位相的には三次元球面，すなわち  $\mathbb{R}^4$  の単位球の3次元表面であり，一般に  $S^3$  と表記される．

### 2.4.1 指数写像 $\exp$

単位クォータニオン  $\mathbf{q} \in S^3$ ，すなわち  $\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = 1$  を考え，回転行列の直交条件  $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}$  と同様に進めてみることにしよう．

時間微分をとると，

$$\frac{d(\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q})}{dt} = \dot{\mathbf{q}}^* \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (90)$$

となり,

$$\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}} = -(\dot{\mathbf{q}}^* \otimes \mathbf{q}) = -(\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}})^* \quad (91)$$

が導かれる. つまり  $\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}$  は純クォータニオン (すなわち,  $\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}}$  は自身の共役の正負を反転させたものに等しく, したがってその実部は0である) であることを意味する. よって純クォータニオン  $\Omega \in \mathbb{H}_p$  を用いて, 以下のように書く.

$$\mathbf{q}^* \otimes \dot{\mathbf{q}} = \Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_p \quad (92)$$

$\mathbf{q}$  を左側から掛けると,

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \otimes \Omega \quad (93)$$

という微分方程式が得られる. 初期値付近では,  $\mathbf{q} = 1$  と仮定でき上記の微分方程式は,  $\dot{\mathbf{q}} = \Omega \in \mathbb{H}_p$  のように簡単になる. したがって, 純クォータニオン空間  $\mathbb{H}_p$  はクォータニオン単位球  $S^3$  の**正接空間**, リー代数を成す. しかし, クォータニオンの場合, この空間は直接に角速度空間となるわけではなく, このあとすぐにわかるように, 角速度の2分の1の空間である.

$\Omega$  が一定なら, 上記の微分方程式は

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) \otimes e^{\Omega t} \quad (94)$$

のように積分できる. (図3: クォータニオンの指数写像)  $\mathbf{q}(0)$  と  $\mathbf{q}(t)$  は単位クォータニオンなので, 指数  $e^{\Omega t}$  も単位クォータニオンとなる. これはクォータニオンの指数関数 (42) からすでに分かっていたことである.  $\mathbf{V} \triangleq \Omega \Delta t$  と定義すると,

$$\boxed{\mathbf{q} = e^{\mathbf{V}}} \quad (95)$$

となる. これもまた指数写像で, 純クォータニオン空間から, 単位クォータニオンで表される回転空間への作用

$$\exp : \mathbb{H}_p \rightarrow S^3 ; \mathbf{V} \mapsto \exp(\mathbf{V}) = e^{\mathbf{V}} \quad (96)$$

となる.

## 2.4.2 大文字の指数写像 Exp

これから見るように, 指数写像 (96) の純クォータニオン  $\mathbf{V}$  には,  $\mathbf{V} = \theta \mathbf{u} = \phi \mathbf{u}/2$  の式により, 回転軸  $\mathbf{u}$  と回転角の半分  $\theta = \phi/2$  が織り込まれている. この, 角度が半分であることについては, 主に2.4.5, 2.4.6, 2.8にて十分に説明をする予定である. 今のところは, 回転作用は二重積  $\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$  で実行されるので, ベクトル  $\mathbf{x}$  は  $\mathbf{q}$  に織り込まれている回転の「2倍」の回転を受ける, すなわちクォータニオン  $\mathbf{q}$  は  $\mathbf{x}$  に対して意図された回転の「半分」を符号化することになる, という説明で十分, ということにしておこう.

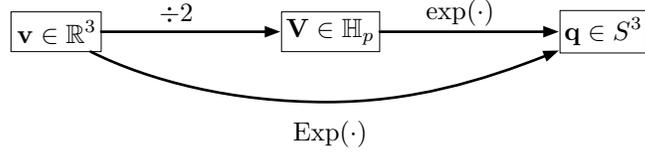


Figure 3: Exponential maps of the quaternion.

角度軸回転パラメータ  $\phi = \phi \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  とクォータニオンとの直接の関係を表現するために、角度が半分になる効果を反映した、大文字版の指数写像  $\text{Exp}$  を定義する。(Fig. 3 参照.)

$$\text{Exp} : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3 ; \phi \mapsto \text{Exp}(\phi) = e^{\phi/2} \quad (97)$$

この大文字の指数写像  $\text{Exp}$  と指数写像  $\text{exp}$  との関係は自明なもので、

$$\text{Exp}(\phi) \triangleq \text{exp}(\phi/2) \quad (98)$$

である。また、角速度ベクトル  $\omega = 2\Omega \in \mathbb{R}^3$  を導入すると、(93) と (94) は

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \omega \quad (99)$$

$$\mathbf{q} = e^{\omega t/2} \quad (100)$$

となり、便利である。

### 2.4.3 クォータニオン及び回転ベクトル

軸  $\mathbf{u}$  周りの  $\phi$  ラジアン of 回転を表す回転ベクトルを  $\phi = \phi \mathbf{u}$  とすると、指数写像はオイラーの公式を拡張したものを使って、以下のように式展開できる。(式の展開を完全に追うには (37-42) を参照すること。),

$$\mathbf{q} \triangleq \text{Exp}(\phi \mathbf{u}) = e^{\phi \mathbf{u}/2} = \cos \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \\ \mathbf{u} \sin(\phi/2) \end{bmatrix} \quad (101)$$

これを回転ベクトルからクォータニオンへの変換公式と呼び、本稿では  $\mathbf{q} = \mathbf{q}\{\phi\} \triangleq \text{Exp}(\phi)$  と表記する。

### 2.4.4 対数写像 $\log$

対数写像を指数写像の逆写像として以下のように定義する。

$$\log : S^3 \rightarrow \mathbb{H}_p ; \mathbf{q} \mapsto \log(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\theta \quad (102)$$

これはもちろん Section 1.3.6 でクォータニオンの対数写像として与えた定義である。また、デカルト座標系の三次元空間における回転の角度  $\phi$  と軸  $\mathbf{u}$  を直接与える、大文字の対数写像  $\text{Log}$  を

$$\text{Log} : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \mathbf{q} \mapsto \text{Log}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\phi \quad (103)$$

のように定義する。大文字の対数写像  $\text{Log}$  と対数写像  $\log$  との関係は自明で、

$$\text{Log}(\mathbf{q}) \triangleq 2\log(\mathbf{q}) \quad (104)$$

が成立する。この大文字の対数写像  $\text{Log}$  を用いる際は、四象限版である、 $\arctan(y, x)$  を使う。(101) より、以下のようなになる。

$$\phi = 2\arctan(\|\mathbf{q}_v\|, q_w) \quad (105a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}_v / \|\mathbf{q}_v\| \quad (105b)$$

小さな角度のクォータニオンに対しては (105b) は発散するので、その場合は  $\arctan()$  関数のテイラー展開を途中で打ち切ったものを用いて、以下を得る。

$$\text{Log}(\mathbf{q}) = \theta\mathbf{u} \approx 2\frac{\mathbf{q}_v}{q_w} \left(1 - \frac{\|\mathbf{q}_v\|^2}{3q_w^2}\right) \quad (106)$$

#### 2.4.5 回転作用

いよいよクォータニオンを用いたベクトル回転に関する仮説 (86) を証明し、ここまで述べてきたことが全て妥当だと言う段階にある。ベクトル  $\mathbf{x}$  を軸  $\mathbf{u}$  中心に角度  $\phi$  回転させるには、挟み込み積とも呼ばれる、クォータニオン二重積を実行する。

$$\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* \quad (107)$$

ここで、 $\mathbf{q} = \text{Exp}(\mathbf{u}\phi)$  であり、ベクトル  $\mathbf{x}$  はクォータニオンの形式で

$$\mathbf{x} = xi + yj + zk = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_p \quad (108)$$

のように書かれている。この二重積が、実行したいベクトル回転に実際になることを示すために、(13), (101), そして、ベクトルと三角形の基本恒等式を用いて以下のように (107)

を展開する.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* \\
&= \left( \cos \frac{\phi}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} \right) \otimes (0 + \mathbf{x}) \otimes \left( \cos \frac{\phi}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} \right) \\
&= \mathbf{x} \cos^2 \frac{\phi}{2} + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{u}) \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{u} \sin^2 \frac{\phi}{2} \\
&= \mathbf{x} \cos^2 \frac{\phi}{2} + 2(\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} - (\mathbf{x}(\mathbf{u}^\top \mathbf{u}) - 2\mathbf{u}(\mathbf{u}^\top \mathbf{x})) \sin^2 \frac{\phi}{2} \\
&= \mathbf{x}(\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{x})(2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}) + \mathbf{u}(\mathbf{u}^\top \mathbf{x})(2 \sin^2 \frac{\phi}{2}) \\
&= \mathbf{x} \cos \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi + \mathbf{u}(\mathbf{u}^\top \mathbf{x})(1 - \cos \phi) \\
&= (\mathbf{x} - \mathbf{u} \mathbf{u}^\top \mathbf{x}) \cos \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi + \mathbf{u} \mathbf{u}^\top \mathbf{x} \\
&= \mathbf{x}_\perp \cos \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \sin \phi + \mathbf{x}_\parallel
\end{aligned} \tag{109}$$

これは、ベクトルの回転公式 (54) に完全に一致している.

#### 2.4.6 $SO(3)$ 多様体の二重被覆

単位クォータニオン  $\mathbf{q}$  を考える. この単位クォータニオンを一般的な四次元ベクトルと捉えると,  $\mathbf{q}$  と, 初期姿勢を表す恒等クォータニオン  $\mathbf{q}_1 = [1, 0, 0, 0]$  との成す角  $\theta$  は以下を満たす.

$$\cos \theta = \mathbf{q}_1^\top \mathbf{q} = \mathbf{q}(1) = q_w \tag{110}$$

同時に, 三次元空間における物体をクォータニオン  $\mathbf{q}$  によって回転する際の回転角  $\phi$  は

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi/2 \\ \mathbf{u} \sin \phi/2 \end{bmatrix} \tag{111}$$

を満たす. つまり,  $q_w = \cos \theta = \cos \phi/2$  であり, あるクォータニオンの表すベクトルと恒等クォータニオンの表すベクトルとが四次元空間において成す角は, 三次元空間においてそのクォータニオンが実行する回転の角の半分であることを表す.

$$\theta = \phi/2 \tag{112}$$

この二重被覆を Fig. 4 で解説する. 2つのクォータニオンの成す角が  $\theta = \pi/2$  となるまでに, 三次元空間における回転はすでに  $\phi = \pi$ , つまり半回転に達しており, クォータニオンの表すベクトルが半回転したときには, 三次元空間における回転は1回転に達している.

クォータニオンの表すベクトルの二度目の半回転  $\pi < \theta < 2\pi$  は, 三次元空間における二度目の全回転  $2\pi < \phi < 4\pi$ , つまり, 回転多様体の二度目の被覆を表す.

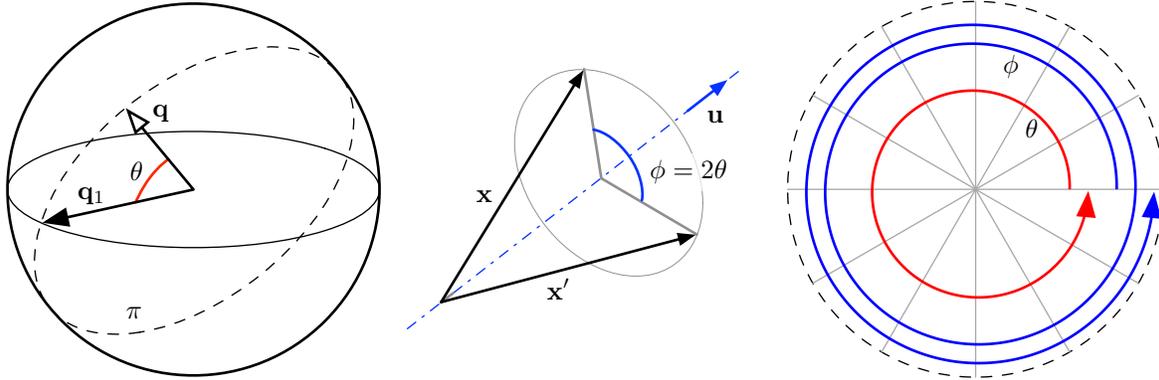


Figure 4: 回転多様体の二重被覆

(左：単位三次元球面におけるクォータニオン  $\mathbf{q}$  は恒等クォータニオン  $\mathbf{q}_1$  とともに角度  $\theta$  を定義する．中央：クォータニオンにより行われる三次元空間における回転  $\mathbf{x}' = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$  は元のクォータニオンの角の2倍の角度  $\phi$  である．右：四次元と三次元の回転面を重ね合わせると，三次元球面（赤色）上でクォータニオンが一回転すると，三次元空間（青色）で回転ベクトル  $\mathbf{x}$  が二回転する様子が分かる）

## 2.5 回転行列とクォータニオン

これまで見てきたように，回転ベクトル  $\phi = \mathbf{u} \phi$  が与えられたとき，単位クォータニオンと回転行列の指数写像は回転演算子  $\mathbf{q} = \text{Exp}(\mathbf{u} \phi)$  と  $\mathbf{R} = \text{Exp}(\mathbf{u} \phi)$  を生成する．そしてそれぞれの回転演算子は，ベクトル  $\mathbf{x}$  を同じ座標軸  $\mathbf{u}$  の周りに同じ角度  $\phi$  だけ回転する。<sup>10</sup>つまり，もし

$$\forall \phi, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{q} = \text{Exp}(\phi), \mathbf{R} = \text{Exp}(\phi) \quad (113)$$

ならば，以下が成り立つ．

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{R} \mathbf{x} \quad (114)$$

この恒等式の両辺は  $\mathbf{x}$  について線形なので，左辺を展開して右辺の項を特定することによってクォータニオンと等価な回転行列の表式が導かれ，以下のクォータニオンから回転行列への変換公式を得る．

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_x q_z + q_w q_y) \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & q_w^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_w q_x) \\ 2(q_x q_z - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & q_w^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix} \quad (115)$$

<sup>10</sup>指数写像  $\mathbf{R} = \text{Exp}(\phi)$  と  $\mathbf{q} = \text{Exp}(\phi)$  の間には表記に曖昧さがあるのが明白だが，文脈によって容易に解決できる．あるときは返り値の型が  $\mathbf{R}$  (回転行列) か  $\mathbf{q}$  (クォータニオン) かの問題にすぎないし，またあるときはクォータニオン積  $\otimes$  があるかないかの問題である．

なお、本稿を通して  $\mathbf{R} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}$  と表記する．また、クォータニオン積の行列表現 (17–19) から別の公式が得られる．というのも

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* = [\mathbf{q}^*]_R [\mathbf{q}]_L \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R}\mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (116)$$

から簡単な式変形によって以下が従うからである．

$$\mathbf{R} = (q_w^2 - \mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v) \mathbf{I} + 2 \mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^\top + 2 q_w [\mathbf{q}_v]_\times \quad (117)$$

回転行列  $\mathbf{R}$  はクォータニオンに関する以下のような性質を持つ．

$$\mathbf{R}\{[1, 0, 0, 0]^\top\} = \mathbf{I} \quad (118)$$

$$\mathbf{R}\{-\mathbf{q}\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\} \quad (119)$$

$$\mathbf{R}\{\mathbf{q}^*\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}^\top \quad (120)$$

$$\mathbf{R}\{\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}_1\} \mathbf{R}\{\mathbf{q}_2\} \quad (121)$$

この性質から以下のことに気付く．(118) は、恒等クォータニオンは無回転に対応していることを表す．(119) は、クォータニオンの符号反転が元のクォータニオンと同じ回転になることを表し、 $SO(3)$  の二重被覆を定義している．(120) は、クォータニオンの共役が元のクォータニオンと逆方向の回転になることを表す．(121) は、クォータニオン積による回転が個々のクォータニオンによる同じ順番での連続回転になることを表す．

加えて、回転行列  $\mathbf{R}$  は以下の性質も持つ．

$$\mathbf{R}\{\mathbf{q}^t\} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}^t \quad (122)$$

この性質は、変動するスカラー  $t$  上のクォータニオンと回転行列の球状補間に関係する．

## 2.6 回転の合成

クォータニオンの合成は、回転行列と同様に、すなわち適切なクォータニオン積や行列積を伴い、同じ順序でなされる．

$$\mathbf{q}_{AC} = \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC} \quad \mathbf{R}_{AC} = \mathbf{R}_{AB} \mathbf{R}_{BC} \quad (123)$$

これはクォータニオン積と行列積の結合法則から直ちに導かれる．

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A &= \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{x}_B \otimes \mathbf{q}_{AB}^* & \mathbf{x}_A &= \mathbf{R}_{AB} \mathbf{x}_B \\ &= \mathbf{q}_{AB} \otimes (\mathbf{q}_{BC} \otimes \mathbf{x}_C \otimes \mathbf{q}_{BC}^*) \otimes \mathbf{q}_{AB}^* & &= \mathbf{R}_{AB} (\mathbf{R}_{BC} \mathbf{x}_C) \\ &= (\mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}) \otimes \mathbf{x}_C \otimes (\mathbf{q}_{BC}^* \otimes \mathbf{q}_{AB}^*) & &= (\mathbf{R}_{AB} \mathbf{R}_{BC}) \mathbf{x}_C \\ &= (\mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}) \otimes \mathbf{x}_C \otimes (\mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC})^* & &= \mathbf{R}_{AC} \mathbf{x}_C . \\ &= \mathbf{q}_{AC} \otimes \mathbf{x}_C \otimes \mathbf{q}_{AC}^* \end{aligned}$$

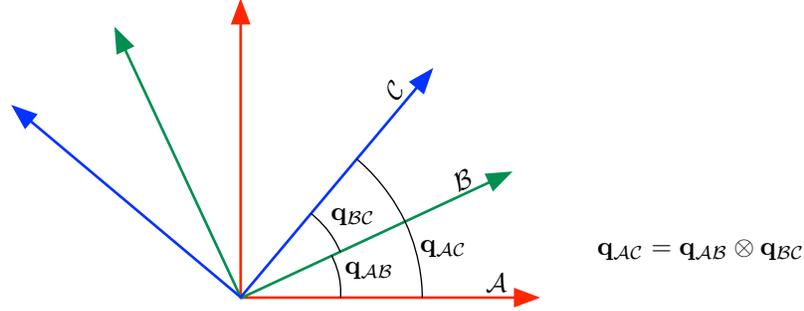


Figure 5: 回転の合成.  $\mathbb{R}^2$  においては, 可換な ‘和’ 演算によって単純に  $\theta_{AC} = \theta_{AB} + \theta_{BC}$  とする.  $\mathbb{R}^3$  における合成は  $\mathbf{q}_{AC} = \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}$  を満足する. これを行列で表すと  $\mathbf{R}_{AC} = \mathbf{R}_{AB} \mathbf{R}_{BC}$ . これらの演算子は非可換であり, その順序を厳密に尊重せねばならない. ‘AB’ に ‘BC’ が連鎖して ‘AC’ となる, といった適切な表記が役に立つ.

**表記についてのコメント** 適切な表記によって, とりわけ複数の回転の合成の際に, 合成する要素の正しい順番が分かりやすくなる ( Fig. 5 参照). 例えば, クォータニオン  $\mathbf{q}_{ji}$  と回転行列  $\mathbf{R}_{ji}$  がそれぞれ状態  $i$  から状態  $j$  への回転  $\mathbf{x}_j = \mathbf{q}_{ji} \otimes \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{q}_{ji}^*$  および  $\mathbf{x}_j = \mathbf{R}_{ji} \mathbf{x}_i$  を表すとすると, クォータニオンで表されたいくつかの回転  $\mathbf{q}_{OA}, \mathbf{q}_{AB}, \mathbf{q}_{BC}, \mathbf{q}_{OX}, \mathbf{q}_{XZ}$  が与えられたとき, その添字を連鎖すればよく,

$$\mathbf{q}_{OC} = \mathbf{q}_{OA} \otimes \mathbf{q}_{AB} \otimes \mathbf{q}_{BC}$$

$$\mathbf{R}_{OC} = \mathbf{R}_{OA} \mathbf{R}_{AB} \mathbf{R}_{BC}$$

さらに, 逆向きの回転は共役クォータニオン  $\mathbf{q}_{ji} = \mathbf{q}_{ij}^*$  や転置行列  $\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{R}_{ij}^\top$  に一致することから, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{ZA} &= \mathbf{q}_{XZ}^* \otimes \mathbf{q}_{OX}^* \otimes \mathbf{q}_{OA} \\ &= \mathbf{q}_{ZX} \otimes \mathbf{q}_{XO} \otimes \mathbf{q}_{OA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ZA} &= \mathbf{R}_{XZ}^\top \mathbf{R}_{OX}^\top \mathbf{R}_{OA} \\ &= \mathbf{R}_{ZX} \mathbf{R}_{XO} \mathbf{R}_{OA} \end{aligned}$$

## 2.7 球状線形補間 (SLERP)

クォータニオンは正確な姿勢角補間を計算するのに大変便利である. 2つの姿勢がクォータニオン  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$  で与えられたとして,  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  から  $\mathbf{q}(1) = \mathbf{q}_1$  へ線形に補間するクォータニオン関数  $\mathbf{q}(t), t \in [0, 1]$  を見つけたい. この補間とはすなわち,  $t$  が 0 から 1 まで動くとき, 物体が姿勢  $\mathbf{q}_0$  から姿勢  $\mathbf{q}_1$  まで, ある固定軸の周りに一定速度で連続に回転するものである.

**方法1** 最初の手法はクォータニオン代数を用い, ここまで扱ってきた内容と簡単に関係づけられる,  $\mathbb{R}^3$  における幾何的な議論を行う. まず,  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 \otimes \Delta\mathbf{q}$  となるような  $\mathbf{q}_0$  から  $\mathbf{q}_1$  までの姿勢の増分  $\Delta\mathbf{q}$  を計算する.

$$\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}_0^* \otimes \mathbf{q}_1 \quad (124)$$

そして、 $\Delta \mathbf{q}$  に結びついた回転ベクトル  $\Delta \phi = \mathbf{u} \Delta \phi$  を得る。対数写像を用いて,<sup>11</sup>

$$\mathbf{u} \Delta \phi = \text{Log}(\Delta \mathbf{q}) \quad (125)$$

最後に、回転軸  $\mathbf{u}$  を固定し、回転角の線形な分割  $\delta \phi = t \Delta \phi$  をとる。それを指数写像を通してクォータニオンの形  $\delta \mathbf{q} = \text{Exp}(\mathbf{u} \delta \phi)$  に直し、もとのクォータニオンに合成して補間結果を得る。

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \otimes \text{Exp}(t \mathbf{u} \Delta \phi) \quad (126)$$

全体の手順は  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \otimes \text{Exp}(t \text{Log}(\mathbf{q}_0^* \otimes \mathbf{q}_1))$  と書いて、以下のように短く表される。

$$\boxed{\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \otimes (\mathbf{q}_0^* \otimes \mathbf{q}_1)^t} \quad (127)$$

そして、普通は以下のように計算される ((53) 参照)。

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \otimes \begin{bmatrix} \cos(t \Delta \phi / 2) \\ \mathbf{u} \sin(t \Delta \phi / 2) \end{bmatrix} \quad (128)$$

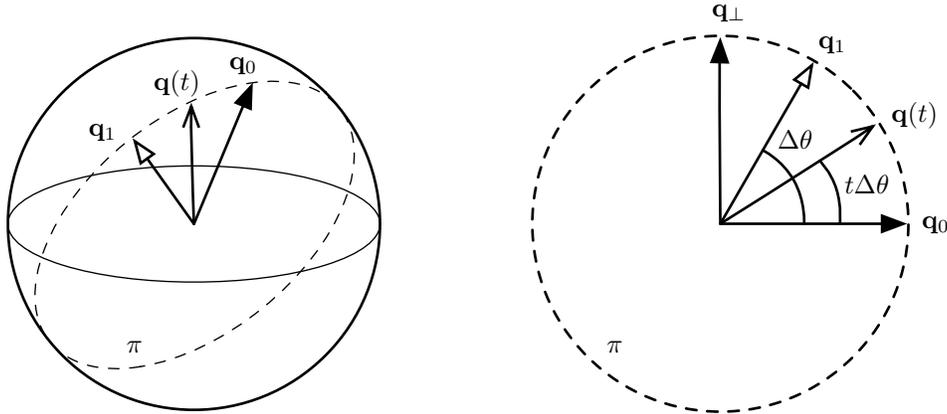


Figure 6:  $\mathbb{R}^4$  の単位球面におけるクォータニオン補間と、 $\mathbb{R}^4$  における回転面  $\pi$  の状態を正面から見たもの。

**注記:** 回転行列の球状線形補間を定義するために似たような手続きがとられることもあるだろう。それによれば

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 \text{Exp}(t \text{Log}(\mathbf{R}_0^\top \mathbf{R}_1)) = \mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0^\top \mathbf{R}_1)^t, \quad (129)$$

ロドリゲス回転公式 (77) を用いて行列指数関数  $\mathbf{R}^t$  が計算できて、以下が従う。

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 (\mathbf{I} + \sin(t \Delta \phi) [\mathbf{u}]_{\times} + (1 - \cos(t \Delta \phi)) [\mathbf{u}]_{\times}^2) \quad (130)$$

<sup>11</sup> $\log()$  や  $\exp()$ , あるいは大文字で始まる形の  $\text{Log}()$  や  $\text{Exp}()$  を用いることができる。計算結果の角度に含まれる要素 2 は、最後の式で打ち消されるので最終的には無関係である。

**方法2** 球状線形補間の他の手法として、クォータニオン代数の核心的な内容から離れていて、かつ回転の軌跡が描かれる空間の次元とも関係の薄いものを考え出すことができる。特に Fig. 6 のように、クォータニオン  $\mathbf{q}_0$  と  $\mathbf{q}_1$  を単位球面内の2つの単位ベクトルとして取り扱い、同じ空間で補間することができる。補間された  $\mathbf{q}(t)$  は、 $\mathbf{q}_0$  と  $\mathbf{q}_1$  を結ぶ球面上の最短経路を一定の角速度で動く。この経路は、 $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}_1$ , 原点で定義される平面と単位球面が交差してできる同一平面上の弧である。これらの手法が先述のものと同価である証明は、[Dam et al. \(1998\)](#) を参照されたい。

これらの手法は最初にベクトル代数を用い、その後上記の通りの操作を行う。 $\mathbf{q}_0$  と  $\mathbf{q}_1$  を2つの単位ベクトルと見なすと、そのなす角<sup>12</sup>はスカラー積で求められる。

$$\cos(\Delta\theta) = \mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1 \quad \Delta\theta = \arccos(\mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1) \quad (131)$$

次のように進める。まず回転面をここでは  $\pi$  と定める。そして  $\mathbf{q}_1$  を  $\mathbf{q}_0$  に対して正規直交化し、平面  $\pi$  の正規直交基底  $\{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_\perp\}$  を得る。

$$\mathbf{q}_\perp = \frac{\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_0}{\|\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_0\|} \quad (132)$$

これにより (Fig. 6 右参照),

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 \cos \Delta\theta + \mathbf{q}_\perp \sin \Delta\theta \quad (133)$$

そうすると、球状補間を得るには  $\mathbf{q}_0$  を平面  $\pi$  上で  $\Delta\theta$  以内の角  $t\Delta\theta$  で回転すればよいので、

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \cos(t\Delta\theta) + \mathbf{q}_\perp \sin(t\Delta\theta) \quad (134)$$

**方法3** Glenn Davis によるよく似た方法 ([Shoemake \(1985\)](#)) で、 $\mathbf{q}_0$  と  $\mathbf{q}_1$  を繋ぐ弧上の任意の点はその2端点の位置ベクトルの線形結合になる (この3点は同一平面上にあるため) という事実を使うものがある。(131) を使って角  $\Delta\theta$  を計算しておけば、(133) を  $\mathbf{q}_\perp$  について解いて (134) に代入することができる。恒等式  $\sin(\Delta\theta - t\Delta\theta) = \sin \Delta\theta \cos t\Delta\theta - \cos \Delta\theta \sin t\Delta\theta$  を変形して、Davis の式 (別の導出は [Eberly \(2010\)](#) を参照のこと) を得る。

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \frac{\sin((1-t)\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} + \mathbf{q}_1 \frac{\sin(t\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} \quad (135)$$

この式は対称性があるので便利である。逆補間子  $s = 1 - t$  を定義すると

$$\mathbf{q}(s) = \mathbf{q}_1 \frac{\sin((1-s)\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)} + \mathbf{q}_0 \frac{\sin(s\Delta\theta)}{\sin(\Delta\theta)}$$

これは  $\mathbf{q}_0$  と  $\mathbf{q}_1$  を入れ替えてできる式と全く同じである。

<sup>12</sup>角  $\Delta\theta = \arccos(\mathbf{q}_0^\top \mathbf{q}_1)$  は、四次元ユークリッド空間の2つのクォータニオンベクトルのなす角である。(125) 式で  $\Delta\phi = \|\text{Log}(\mathbf{q}_0^* \otimes \mathbf{q}_1)\|$  と求められるような、三次元空間での実際の回転角ではない。詳細は Section 2.4.6 を参照されたい。

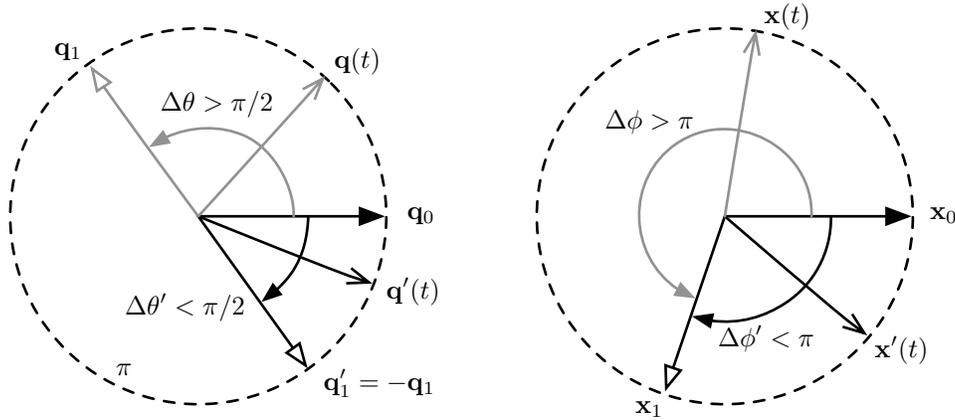


Figure 7: 姿勢角  $\mathbf{q}_0$  と  $\mathbf{q}_1$  の間の最短経路に沿った球状線形補間  
 (左: 四次元空間におけるクォータニオン回転面. 最初と最後の姿勢角クォータニオン,  $\mathbf{q}_0$  から  $\mathbf{q}_1$  までの補間  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\mathbf{q}_0$  から  $-\mathbf{q}_1$  までの補間  $\mathbf{q}'(t)$  を示す. 右: 三次元空間のベクトル回転面,  $\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1$  より,  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{q}_1^* = \mathbf{q}'_1 \otimes \mathbf{x}_0 \otimes \mathbf{q}'_1^*$  が成り立つ. すなわち両クォータニオンは同じ回転をもたらす. しかしながら, 補間されたクォータニオン  $\mathbf{q}(t)$  は  $\mathbf{x}_0$  から  $\mathbf{x}_1$  までの最短でない経路をとるベクトル  $\mathbf{x}(t)$  を生成する. 一方で修正された  $\mathbf{q}'_1 = -\mathbf{q}_1$  からは  $\mathbf{q}'(t)$  が得られ,  $\mathbf{x}_0$  から  $\mathbf{x}_1$  までの最短経路に沿ったベクトル  $\mathbf{x}'(t)$  を生成する)

クォータニオンを基にしたこれら全ての球状線形補間の方法は, 最短経路, すなわち回転角  $\phi \leq \pi$  に沿った正確な補間を保証するために幾らかの注意を要する.  $SO(3)$  のクォータニオン二重被覆 (Section 2.4.6 参照) の結果, 鋭角の  $\Delta\theta \leq \pi/2$  をなすクォータニオンの組しか最短経路に沿って補間できない (Fig. 7 参照). この問題は簡単に確認して解決することができる. もし  $\cos(\Delta\theta) = \mathbf{q}_0^T \mathbf{q}_1 < 0$  なら, 例えば  $\mathbf{q}_1$  を  $-\mathbf{q}_1$  で置き換えて計算すればよい.

## 2.8 クォータニオンと等角回転: 「魔法」の解説

この節では「魔法」と呼ばれるクォータニオンに関する興味深い2つの問題に幾何的な洞察を行う.

- なぜ積  $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$  がベクトル  $\mathbf{x}$  を回転させるのか?
- $\mathbf{q} = e^{\phi/2} = [\cos \phi/2, \mathbf{u} \sin \phi/2]$  によってクォータニオンを構成するとき, なぜ  $1/2$  の角を考える必要があるのか?

幾何的な説明, すなわち代数的な証明 (109) と Section 2.4.6 の二重被覆よりも分かりやすい理論的解釈が欲しい.

始めに, (116) を思い出そう. この式では, (19) 式で定義されているクォータニオン積行列  $[\mathbf{q}]_L$  と  $[\mathbf{q}^*]_R$  を通してクォータニオンの回転操作を説明している.

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* = [\mathbf{q}^*]_R [\mathbf{q}]_L \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R}\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

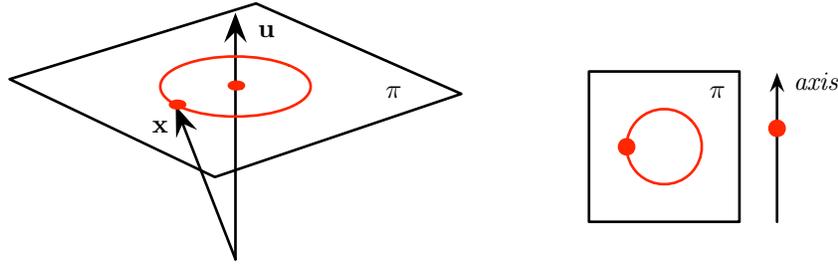


Figure 8:  $\mathbb{R}^3$  における回転. 軸  $\mathbf{u}$  の周りのベクトル  $\mathbf{x}$  の回転は軸と直交する平面上で円周を描く. 軸と平行な  $\mathbf{x}$  の成分は動かず, 軸上の小さな赤い点で表されている. 右側の図は, 部分空間である回転面上と軸上での回転する点の別々の動きを示している.

単位クォータニオン  $\mathbf{q}$  について, クォータニオン積行列  $[\mathbf{q}]_L$  と  $[\mathbf{q}]_R$  は, 2つの重要な性質を満足する.

$$[\mathbf{q}][\mathbf{q}]^\top = \mathbf{I}_4 \quad (136)$$

$$\det([\mathbf{q}]) = +1 \quad (137)$$

さらに, それゆえ  $[\mathbf{q}]_L$  と  $[\mathbf{q}]_R$  は  $SO(4)$  の要素である. すなわち,  $\mathbb{R}^4$  空間における適切な回転行列である. より具体的には, 後述の**等角回転**と呼ばれる特別な種類の回転を表す. 従って, (116)によれば, クォータニオンの回転は  $\mathbb{R}^4$  における2つの連鎖した等角回転に対応する.

クォータニオンの回転の洞察を説明するために,  $\mathbb{R}^4$  における等角回転を理解する必要がある. このために, まずは  $\mathbb{R}^4$  における一般的な回転を理解する必要がある. さらに  $\mathbb{R}^4$  における回転を理解するために, 回転が事実上同一平面内で行われる  $\mathbb{R}^3$  に立ち返る必要がある. 以上のステップを1つ1つ確認していこう.

**$\mathbb{R}^3$  における回転:**  $\mathbb{R}^3$  において, ベクトル  $\mathbf{u}$  で表される任意の回転軸の周りにベクトル  $\mathbf{x}$  を回転することを考えよう (Fig. 8 参照. Fig. 1 も戻って確認されたい). 回転にあたって, 回転軸  $\mathbf{u}$  と並行なベクトルは動かず, 軸と垂直なベクトルは軸に垂直な平面  $\pi$  上で回転する. 一般的なベクトル  $\mathbf{x}$  について,  $\pi$  に射影される2成分は  $\pi$  上で回転し, 軸方向の成分は静止したままである.

**$\mathbb{R}^4$  における回転**  $\mathbb{R}^4$  では, Fig. 9のように, もう1つの次元によって,  $\mathbb{R}^3$  における回転の一次元の軸が新しく二次元の平面になる. この第二の平面が第二の回転のための空間をなす. 実際のところ,  $\mathbb{R}^4$  における回転は四次元空間内の2つの直交する平面での2つの独立した回転を含んでいる. これは, 2つの平面それぞれの上のどの四次元ベクトルもその平面上で回転し, 片方の平面における一般的な四次元ベクトルの回転がもう片方の平面におけるベクトル成分に影響しないということである. そのため, この2つの平面は**不変面**と呼ばれている.

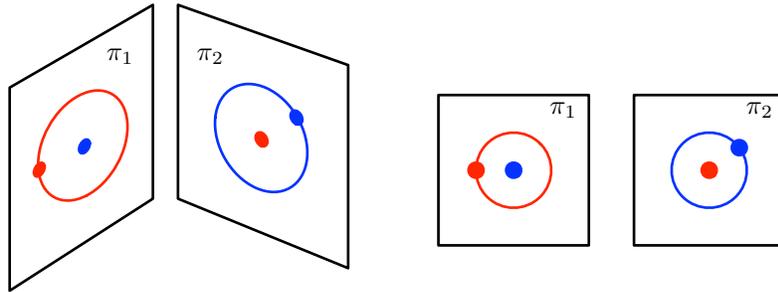


Figure 9:  $\mathbb{R}^4$  における回転. 2つの直交する平面  $\pi_1, \pi_2$  上での2つの直交する回転が考えられる. 平面  $\pi_1$  内のベクトル  $\mathbf{x}$  (図には描かれていない) の回転によって,  $\pi_1$  上に赤い点で示されたこの平面と平行なベクトルの2つの成分は赤の円周を描く. 赤い点で示された  $\pi_2$  内の2成分は変化しない. 逆に, 平面  $\pi_2$  内の回転 ( $\pi_2$  内の青い円周上の青い点) は青い点で示された  $\pi_1$  内の成分を変化させない. 右側の図はその様子をより分かりやすく示しているが,  $\mathbb{R}^4$  の投影としては正しくなく, 誤解されるかもしれない.

$\mathbb{R}^4$  における等角回転: 等角回転, すなわち isoclinic rotation (ギリシャ語由来の言葉で, *iso*: が “equal”, *klinein*: が “to incline” を表す) は  $\mathbb{R}^4$  における上記の回転のことであり, その  $\mathbb{R}^4$  において2つの不変面での回転角の大きさが等しくなっている. そして, 2つの回転角の符号<sup>13</sup>も同じであるとき, **左等角回転**という. 符号が異なるときは**右等角回転**という. (22) で既に見たように, 等角回転の重要な性質は左等角回転と右等角回転が交換可能であることである.

$$[\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R \quad (138)$$

$\mathbb{R}^4$  と  $\mathbb{R}^3$  におけるクォータニオンの回転: 単位クォータニオン  $\mathbf{q} = e^{\mathbf{u}\theta/2}$  が与えられて,  $\mathbb{R}^3$  において軸  $\mathbf{u}$  の周りに角  $\theta$  だけ回転することを表すとき, 行列  $[\mathbf{q}]_L$  はクォータニオン  $\mathbf{q}$  を左から掛けたのに対応する  $\mathbb{R}^4$  における左等角回転である. また, 行列  $[\mathbf{q}]_R$  はクォータニオン  $\mathbf{q}$  を右から掛けたのに対応する  $\mathbb{R}^4$  における右等角回転である. これらの等角回転の回転角はちょうど大きさが  $\theta/2$  であり,<sup>14</sup> 不変面も同一である. そして, 回転の表式 (116) をここでもう一度書くと,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^* = [\mathbf{q}^*]_R [\mathbf{q}]_L \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

これは, 四次元ベクトル  $(0, \mathbf{x})^T$  に対して, 2つの連鎖した等角回転, すなわち左等角回転と右等角回転とでそれぞれ  $\mathbb{R}^3$  において回転したい回転角の半分の大きさの回転を行っていることを表している.  $\mathbb{R}^4$  の不変面の片方において (Fig. 10 参照), 2つの半分の角が異符号なので打ち消し合っている. もう片方の平面では, 2つの角は足されて合計の回転角

<sup>13</sup>2つの不変面が与えられたとき, 任意にその方向を選んで正と負の回転角をそれらの平面内で関係づけるようにできる.

<sup>14</sup>このことは等角回転行列の固有値を求めることで確かめられる. その固有値は位相が  $\pm\theta/2$  に等しい共役な複素数の組になっている.

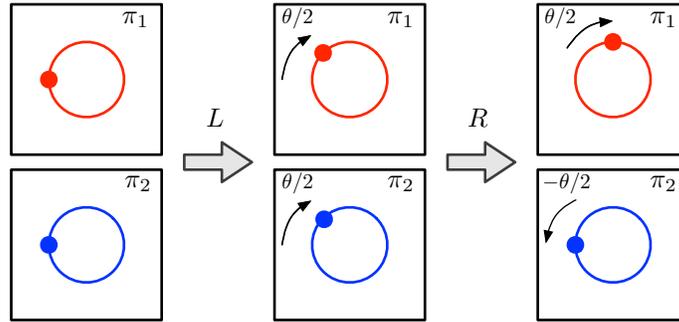


Figure 10:  $\mathbb{R}^4$ におけるクォータニオンの回転. 2つの連鎖した等角回転 (片方は同符号の半角をもつ左等角回転, もう片方は異符号の半角をもつ右等角回転) が, 片方の不変な平面内だけで全角  $\theta$  の純粋な回転を生成する.

$\theta$  になっている. もし (116) から結果的な回転行列  $\mathbf{R}_4$  を定義するなら, 簡単に以下のことがわかる ((138) も参照).

$$\mathbf{R}_4 \triangleq [\mathbf{q}^*]_R [\mathbf{q}]_L = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{q}^*]_R = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (139)$$

ここで  $\mathbf{R}$  は  $\mathbb{R}^3$  における回転行列で,  $\mathbb{R}^4$  の部分空間である  $\mathbb{R}^3$  で明らかにベクトルを回転させ, 4番目の次元は変化しない.

この議論は本稿の範疇をやや逸脱している. また, 不完全でもある. なぜならば, (139) 以上に, なぜ例えば  $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}$  の代わりに  $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$  をする必要があるかの直感的, あるいは幾何的な説明ができていないからである.<sup>15</sup> 読者がよりその仕組みに対する直感的な理解が得られることを望み, ただクォータニオンで回転を説明するためのさらにもう1つの方法を与えるために, この議論を本稿に含めた. 興味のある読者は  $\mathbb{R}^4$  における等角回転についての専門的な文献を調べてみてほしい.

### 3 クォータニオンに関する慣習 (本稿での選択)

#### 3.1 クォータニオンの流派

クォータニオンを定義する方法は複数存在し, 基本的に4つの二択が関係している.

- 要素の順番 — 実部は最初か最後か:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \quad \text{vs.} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_v \\ q_w \end{bmatrix} \quad (140)$$

<sup>15</sup>  $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$  は  $\mathbf{q}$  が単位クォータニオンであるときに回転的作用をすると言えば十分である. 実際,  $\mathbf{q}_v$  が単位純クォータニオンであるとき, 積  $\mathbf{q}_v \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}_v$  は  $\mathbb{R}^3$  において対称移動 (回転ではない!) を生成する. 結局,  $\mathbf{q}$  が単位非純クォータニオンであるとき, 積  $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}$  は特にこれといった性質を持たない.

- 積の公式 — クォータニオン代数の定義

$$ij = -ji = k \quad \text{vs.} \quad ji = -ij = k \quad (141a)$$

これらはそれぞれ異なる掌性に対応している.

$$\text{右手系} \quad \text{vs.} \quad \text{左手系} \quad (141b)$$

つまり, ある回転軸  $\mathbf{u}$  が与えられたとき, 右手系クォータニオン  $\mathbf{q}_{right}\{\mathbf{u}\theta\}$  が表す回転は 右手座標系による回転軸  $\mathbf{u}$  周りの角度  $\theta$  の回転であり, 左手系クォータニオン  $\mathbf{q}_{left}\{\mathbf{u}\theta\}$  が表す回転は左手座標系に従った回転である.

- 回転演算子の機能 — 座標系を回転させるかベクトルを回転させるか

$$\text{受動的} \quad \text{vs.} \quad \text{能動的} \quad (142)$$

- 受動的な場合, 演算の方向 — ローカル座標系からグローバル座標系か, グローバル座標系からローカル座標系か

$$\mathbf{x}_{global} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x}_{local} \otimes \mathbf{q}^* \quad \text{vs.} \quad \mathbf{x}_{local} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x}_{global} \otimes \mathbf{q}^* \quad (143)$$

これらの様々な選択肢により 12 の組み合わせが存在し, 歴史的な発展を遂げた今, いくつかの慣習が特に好まれている. (Chou, 1992; Yazell, 2009). 今日では, 利用可能な文献の中でも, ハミルトン, STS<sup>16</sup>, JPL<sup>17</sup>, ISS<sup>18</sup>, ESA<sup>19</sup>, 工学, ロボティクスなど様々なクォータニオンの流派があり, おそらく他にも存在する. これらの中には同一のものもあれば異なるものもあるが, その事実が明白に述べられていることは少なく, 多くのものは使用しているクォータニオンの上述した 4 つの選択に関する記述が十分でない. これらの違いは回転の公式や積に非自明な形で影響を与えるため, 公式は互換ではない. したがって, 最初から明確に選択しておく必要がある. 最も広く使われ, 文書化されている慣習は, ハミルトン ((140–143) で左側を選択) と JPL ((142) を除いて右側を選択) である. Table 2 はこれらの特徴をまとめたものである. JPL は多くの場合航空宇宙の領域で使用されている一方, ハミルトンはロボティクスの様なその他の工学の領域で使われている. — ただし, これは普遍原則として捉えるべきではない.

筆者は, 早くも (2) で使用されているように, ロボティクスで広く使用されている ROS, Google Ceres, IMU を使用した姿勢推定のためのカルマンフィルタに関する膨大な文献 (Chou, 1992; Kuipers, 1999; Piniés et al., 2007; Roussillon et al., 2011; Martinelli, 2012, and many others) などのソフトウェアライブラリと同じく, 右手系であるハミルトンの慣習を選択している.

JPL の慣習は少なくともロボティクスの分野ではあまり使用されていない. 本論文と近い目的を持つ関連の研究 (Trawny and Roumeliotis, 2005) で広く説明されているが, こ

<sup>16</sup>Space Transportation System, 一般に NASA のスペースシャトルとして知られる.

<sup>17</sup>Jet Propulsion Laboratory, NASA ジェット推進研究所.

<sup>18</sup>International Space Station, 国際宇宙ステーション.

<sup>19</sup>European Space Agency, 欧州宇宙機関.

Table 2: 4つの二択に関するハミルトンと JPL の慣習の比較

クォータニオンの種類	ハミルトン	JPL
1 成分の順番	$(q_w, \mathbf{q}_v)$	$(\mathbf{q}_v, q_w)$
2 代数 掌性	$ij = k$ 右手系	$ij = -k$ 左手系
3 機能	受動的	受動的
4 $\mathbf{q} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}^*$ の意味 既定の記法, $\mathbf{q}$ 既定の演算	ローカルからグローバル $\mathbf{q} \triangleq \mathbf{q}_G \mathbf{L}$ $\mathbf{x}_G = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x}_L \otimes \mathbf{q}^*$	グローバルからローカル $\mathbf{q} \triangleq \mathbf{q}_L \mathbf{G}$ $\mathbf{x}_L = \mathbf{q} \otimes \mathbf{x}_G \otimes \mathbf{q}^*$

の文献は JPL の慣習のみに集中している。JPL のクォータニオンは（当然）JPL の文献や [Trawny and Roumeliotis](#) から着想を得た Li, Mourikis, Roumeliotis らの文献で使用されている。これらの研究は、本論文で取り組む visual-inertial odometry (VIO) や SLAM を扱う時に基本的な着想を得る上で重要である。

本節の残りでは、これら二つのクォータニオンの慣習を少しだけ深く分析してみることにする。

### 3.1.1 クォータニオン成分の順番

最も根本的というわけではないが、最も顕著なハミルトンと JPL の違いは、スカラー部が最初か（ハミルトン）最後か（JPL）という成分の順番である。この違いが意味することはかなり明白であり、解釈の上で大きな障壁とはならないはずだ。実際、クォータニオンの実部を最後においているいくつかの研究も（例えば、C++ の eigen ライブラリ）、他の 3 つの性質が維持されている限り、ハミルトンの慣習に従っているとみなされている。

本稿では、よりわかりやすくするために、一般的に使用される添字 (0, 1, 2, 3) の代わりに添字 ( $w, x, y, z$ ) を使用してきた。順番を変えたとき、 $q_w$  は常に実部を意味している一方、 $q_0$  が実部を意味しているかどうかは明白ではない。— $q_0$  を実部として最後におく  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_0)$  の場合もあるが、 $q_3$  を実部として最後におく  $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$  の場合が一般的である。<sup>20</sup> ある慣習から他の慣習に移るとき、行や列を入れ替える必要があるため、クォータニオンに関係する  $4 \times 4$  または  $3 \times 4$  行列が関わる公式には注意しなければならない。入れ替えること自体は難しくないが、これらの違いに気づかずに間違いがちである。

要素の順番に関する 2 つの興味は:

- 実部が最初の場合、そのクォータニオンはお馴染みの**実部+虚部**という形である複素数の拡張として自然に解釈される。こういった理由で、この表記を好む人もいるだろう。
- 実部が最後の場合、ベクトルで表されるクォータニオン  $\mathbf{q} = [x, y, z, w] \in \mathbb{H}$  は 3 次元投影空間における同次のベクトルと完全に等価な形  $\mathbf{p} = [x, y, z, w] \in \mathbb{P}^3$  であり、

<sup>20</sup>1 も参照されたい。

いずれの場合においても  $x, y, z$  は明らかに3つのデカルト座標系の直交軸と同一である。このため、3次元の幾何的な問題を扱うとき、特に同次のベクトルが単位球面  $\|\mathbf{p}\| = 1$  に制約されている場合に（この場合に限らないが）、クォータニオンや同次のベクトルの演算の代数がより同質なものとなる。

### 3.1.2 クォータニオン代数の仕様

ハミルトンの慣習では  $ij = k$  と定義しているため、

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \quad (144)$$

が成立する一方、JPLの慣習では  $ji = k$  としているために

$$i^2 = j^2 = k^2 = -ijk = -1, \quad -ij = ji = k, \quad -jk = kj = i, \quad -ki = ik = j \quad (145)$$

が成立する。

興味深いことに、これらの微妙な違いが回転演算子としての基本的な性質に影響することはない。数学的に重要な影響は、(13)における外積の符号が変化することであり、これはクォータニオンの掌性の違いにつながる。(Shuster, 1993) ハミルトンは  $ij = k$  を採用しているために右手系となり、すなわち、右手座標系に従ってベクトルを回転させることになる。一方で、JPLは  $ji = k$  を採用しているために左手系となる。(Trawny and Roumeliotis, 2005)。左手系と右手系の回転は回転軸を表すベクトル部が逆符号であるために、 $\mathbf{q}_{left}$  と  $\mathbf{q}_{right}$  の間には以下の関係が成立する。

$$\mathbf{q}_{left} = \mathbf{q}_{right}^* \quad (146)$$

### 3.1.3 回転演算子の機能

ここまで3次元でどのようにベクトルを回転させるかについてみてきた。これらは演算子（これは全ての回転演算子に影響する）がベクトルを能動的に回転させるために、(Shuster, 1993) では能動的 解釈と呼ばれている。

$$\mathbf{x}' = \mathbf{q}_{active} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{q}_{active}^* \quad \mathbf{x}' = \mathbf{R}_{active} \mathbf{x} \quad (147)$$

ベクトル  $\mathbf{x}$  に対する  $\mathbf{q}$  と  $\mathbf{R}$  によるはたらきは以下のようにも捉えることができる。ベクトルは不変だが  $\mathbf{q}$  や  $\mathbf{R}$  で指定された量だけ観察者の視点が回転したという捉え方である。これは座標変換と呼ばれ、(Shuster, 1993) ではベクトルが不動であるために受動的解釈と呼ばれている。

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{q}_{passive} \otimes \mathbf{x}_A \otimes \mathbf{q}_{passive}^* \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{R}_{passive} \mathbf{x}_A \quad (148)$$

$A$  と  $B$  は2つのデカルト直交座標の参照座標系であり、 $\mathbf{x}_A$  と  $\mathbf{x}_B$  は同じベクトルである  $\mathbf{x}$  のそれらの座標系における表現である。説明と適切な表記については以下で述べる。

能動的解釈と受動的解釈は互いに逆の演算子によって支配されている。

$$\mathbf{q}_{active} = \mathbf{q}_{passive}^* \quad \mathbf{R}_{active} = \mathbf{R}_{passive}^T$$

ハミルトン、JPL いずれも受動的解釈を採用している。

**方向余弦行列** 受動的演算子を回転演算子としてではなく、むしろ**方向余弦行列**と呼ばれる姿勢表現の一つとして捉える著者もいる。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{zx} \\ c_{xy} & c_{yy} & c_{zy} \\ c_{xz} & c_{yz} & c_{zz} \end{bmatrix} \quad (149)$$

各要素  $c_{ij}$  は、回転前の座標系の軸  $i$  と回転後の座標系の軸  $j$  の間の余弦であり、以下の恒等式が成立する。

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{R}_{passive} \quad (150)$$

### 3.1.4 回転演算子の方向

受動的な解釈の場合、ローカル座標系からグローバル座標系に座標変換するか、グローバル座標系からローカル座標系に座標変換するか、といった回転行列やクォータニオンの作用方向も問題となる。

二つのデカルト直交座標系  $\mathcal{G}$  と  $\mathcal{L}$  を考え、 $\mathcal{G}$ 、 $\mathcal{L}$  をそれぞれグローバル座標系、ローカル座標系とする。「グローバル」や「ローカル」は相対的な定義であり、 $\mathcal{G}$  は  $\mathcal{L}$  に対してグローバルであり、 $\mathcal{L}$  は  $\mathcal{G}$  に対してローカルである。つまり、 $\mathcal{L}$  は参照座標系  $\mathcal{G}$  によって指定される座標系である。<sup>21</sup>座標系  $\mathcal{L}$  におけるベクトル  $\mathbf{x}_{\mathcal{L}}$  が座標系  $\mathcal{G}$  でクォータニオンや行列の積によって表現されるという意味で、 $\mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}$  および  $\mathbf{R}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}$  はそれぞれベクトルを座標系  $\mathcal{L}$  から座標系  $\mathcal{G}$  へ変換する回転行列およびクォータニオンとなる。

$$\mathbf{x}_{\mathcal{G}} = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}} \otimes \mathbf{x}_{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}^* \quad \mathbf{x}_{\mathcal{G}} = \mathbf{R}_{\mathcal{G}\mathcal{L}} \mathbf{x}_{\mathcal{L}} \quad (151)$$

$\mathcal{G}$  から  $\mathcal{L}$  への逆の変換は以下の式で与えられる。

$$\mathbf{x}_{\mathcal{L}} = \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} \otimes \mathbf{x}_{\mathcal{G}} \otimes \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}}^* \quad \mathbf{x}_{\mathcal{L}} = \mathbf{R}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} \mathbf{x}_{\mathcal{G}} \quad (152)$$

ただし、

$$\mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}^* \quad \mathbf{R}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} = \mathbf{R}_{\mathcal{G}\mathcal{L}}^{\top} \quad (153)$$

である。

ハミルトンの慣習では、ローカル座標系  $\mathcal{L}$  からグローバル座標系  $\mathcal{G}$  への変換を既定として使っている。

$$\mathbf{q}_{Hamilton} \triangleq \mathbf{q}_{[with\ respect\ to][of]} = \mathbf{q}_{[to][from]} = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L}} \quad (154)$$

一方で、JPL は逆のグローバルからローカルへの変換を用いている。

$$\mathbf{q}_{JPL} \triangleq \mathbf{q}_{[of][with\ respect\ to]} = \mathbf{q}_{[to][from]} = \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G}} \quad (155)$$

<sup>21</sup>{global, local} の他の流派としては、{parent, child}, {world, body} が挙げられる。前者は3つ以上の座標系が関係するシステム (例えば、人型ロボットの各可動リンクの諸座標系) を扱うときに便利である。後者は、世界という固有の参照座標系で動く剛体の乗り物 (例えば、飛行機や車) を扱う時に便利である。

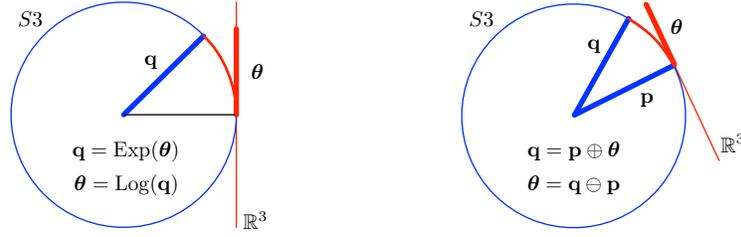


Figure 11:  $S^3$  多様体は  $\mathbb{R}^4$  における単位球であり，本図では青い単位円で表されている．多様体の正接空間は超平面  $\mathbb{R}^3$  であり，赤い直線で表されている．

(左:  $\text{Exp}()$  および  $\text{Log}()$  演算子は  $\mathbb{R}^3$  の元を  $S^3$  の元に写像する．(または，その逆．) 右:  $\oplus$  および  $\ominus$  演算子は正接空間の元を持つ多様体の元に関係している．(同様に，これらの図は  $SO(3)$  多様体を図示している．))

ただし，以下のことに注意されたい．

$$\mathbf{q}_{JPL} \triangleq \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G},\text{left}} = \mathbf{q}_{\mathcal{L}\mathcal{G},\text{right}}^* = \mathbf{q}_{\mathcal{G}\mathcal{L},\text{right}} \triangleq \mathbf{q}_{\text{Hamilton}} \quad (156)$$

上式は特に実用的なわけではないが，複数の慣習を混ぜて使うといかに混乱しやすいかを示している． $\mathbf{q}_{JPL} = \mathbf{q}_{\text{Hamilton}}$  と結論されることも注目に値するが，これは美しい結果では決してなく，混同の原因でしかない．なぜならば，この等式はクォータニオンの値について成立するものであり，公式で2つのクォータニオンが使用された場合には異なる意味を持つからである．

## 4 摂動，微分，積分

### 4.1 $SO(3)$ における加法演算子と減法演算子

ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  において，加法と減法は通常の加法演算子‘+’と減法演算子‘-’を用いて行われる． $SO(3)$  においてこれは不可能であるが，適切な微積分の体系を築くために，等価な演算子を定義できる．

ここでは，要素  $R \in SO(3)$  と  $R$  における正接空間の要素  $\theta \in \mathbb{R}^3$  との加法演算子  $\oplus$  と減法演算子  $\ominus$  を以下のように定義する．

**加法演算子．** ‘加法’演算子  $\oplus : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$  は  $SO(3)$  の参照要素  $R$  を (しばしば微小) 回転した結果， $SO(3)$  の要素  $S$  を生成する．この回転は，多様体  $SO(3)$  に対する，その参照要素  $R$  における接ベクトル空間の要素ベクトル  $\theta \in \mathbb{R}^3$  によって特徴づけられる．

$$S = R \oplus \theta \triangleq R \circ \text{Exp}(\theta) \quad R, S \in SO(3), \theta \in \mathbb{R}^3 \quad (157)$$

この演算子は  $SO(3)$  の任意の表現に対して定義できることに注意が必要である．特にクォータニオンと回転行列については以下の様になる．

$$\mathbf{q}_S = \mathbf{q}_R \oplus \theta = \mathbf{q}_R \otimes \text{Exp}(\theta) \quad (158)$$

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{R}_R \oplus \theta = \mathbf{R}_R \cdot \text{Exp}(\theta) \quad (159)$$

**減法演算子.** ‘減法’演算子  $\ominus : SO(3) \times SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$  は上記 (加法演算子) の逆演算子である. この演算子は  $SO(3)$  の2つの要素間のベクトル角度差  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$  を返す. この角度差は参照要素  $R$  に接するベクトル空間の中で表現される.

$$\boldsymbol{\theta} = S \ominus R \triangleq \text{Log}(R^{-1} \circ S) \quad R, S \in SO(3), \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3 \quad (160)$$

クォータニオンおよび回転行列の場合は次のようになる.

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{q}_S \ominus \mathbf{q}_R = \text{Log}(\mathbf{q}_R^* \otimes \mathbf{q}_S) \quad (161)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}_S \ominus \mathbf{R}_R = \text{Log}(\mathbf{R}_R^\top \mathbf{R}_S) \quad (162)$$

どちらの場合も, ベクトル差  $\boldsymbol{\theta}$  が一般に小さいと仮定しても, 上記の定義は任意の  $\boldsymbol{\theta}$  の値 (ただし  $SO(3)$  多様体の最初の被覆まで, つまり角度  $\theta < \pi$ ) において成り立つことに注意が必要である.

## 4.2 4つの可能な微分の定義

### 4.2.1 ベクトル空間からベクトル空間への関数

スカラーとベクトルの場合は, 古典的な微分の定義に従って, 関数  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  が与えられた時,  $\{+, -\}$  を使って次の様に微分を定義する.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \lim_{\delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{\delta \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (163)$$

オイラー法では, 次の様な線形近似が生成される.

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

### 4.2.2 $SO(3)$ から $SO(3)$ への関数

$R \in SO(3)$  と局所的で小さな角度変化  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$  を持つ関数  $f : SO(3) \rightarrow SO(3)$  が与えられたとき,  $\{\oplus, \ominus\}$  を使って微分を次のように定義する.

$$\frac{\partial f(R)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \triangleq \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{f(R \oplus \delta \boldsymbol{\theta}) \ominus f(R)}{\delta \boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (164)$$

$$= \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(f^{-1}(R) f(R \text{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta})))}{\delta \boldsymbol{\theta}} \quad (165)$$

オイラー法では, 次の様な線形近似が生成される.

$$f(R \oplus \Delta \boldsymbol{\theta}) \approx f(R) \oplus \frac{\partial f(R)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta} \triangleq f(R) \text{Exp} \left( \frac{\partial f(R)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta} \right) \in SO(3)$$

### 4.2.3 ベクトル空間から $SO(3)$ への関数

関数  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow SO(3)$  の場合，ベクトルの摂動は‘+’， $SO(3)$  の差分は‘ $\ominus$ ’を使用する．

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \lim_{\delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) \ominus f(\mathbf{x})}{\delta \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{3 \times m} \quad (166)$$

$$= \lim_{\delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(f^{-1}(\mathbf{x})f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}))}{\delta \mathbf{x}} \quad (167)$$

オイラー法では，次の様な線形近似が生成される．

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) \oplus \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \triangleq f(\mathbf{x}) \text{Exp} \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} \right) \in SO(3)$$

### 4.2.4 $SO(3)$ からベクトル空間への関数

関数  $f : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^n$  の場合， $SO(3)$  の摂動には‘ $\oplus$ ’，ベクトルの差には‘-’を使用する．

$$\frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \triangleq \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{R} \oplus \delta \boldsymbol{\theta}) - f(\mathbf{R})}{\delta \boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{n \times 3} \quad (168)$$

$$= \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{R} \text{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta})) - f(\mathbf{R})}{\delta \boldsymbol{\theta}} \quad (169)$$

オイラー法では，次の様な線形近似が生成される．

$$f(\mathbf{R} \oplus \delta \boldsymbol{\theta}) \approx f(\mathbf{R}) + \frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta} \triangleq f(\mathbf{R}) + \text{Exp} \left( \frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Delta \boldsymbol{\theta} \right) \in SO(3)$$

## 4.3 非常に有用な回転のヤコビアン

ベクトル  $\mathbf{a}$  について，単位回転軸ベクトル  $\mathbf{u}$  周りに  $\theta$  ラジアン回転させることを考えてみよう．ここで，回転を表す同等な三つの表現，すなわち  $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{u}$  と  $\mathbf{q} = \mathbf{q}\{\boldsymbol{\theta}\}$ ， $\mathbf{R} = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\}$  を用いる．我々は回転結果のヤコビアンについて，これらの異なる表現においてそれぞれ知る必要がある．

### 4.3.1 ベクトルについてのヤコビアン

ベクトル  $\mathbf{a}$  の回転の  $\mathbf{a}$  についての微分は簡単である．

$$\boxed{\frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^*)}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial(\mathbf{R} \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{R}} \quad (170)$$

### 4.3.2 クォータニオンについてのヤコビアン

対照的に，回転のクォータニオンについての微分は厄介である．簡便のために，クォータニオンの簡単な表記を用いる． $\mathbf{q} = [w \ \mathbf{v}] = w + \mathbf{v}$ . (34) や (33)，それに 恒等式  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a}^\top \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a}^\top \mathbf{b}) \mathbf{c}$  を利用して，次のようにクォータニオン方式の回転 (107) を変形すると，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}' &= \mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^* \\
 &= (w + \mathbf{v}) \otimes \mathbf{a} \otimes (w - \mathbf{v}) \\
 &= w^2 \mathbf{a} + w(\mathbf{v} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{v} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{v} \\
 &= w^2 \mathbf{a} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) - [(-\mathbf{v}^\top \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{v}] \\
 &= w^2 \mathbf{a} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) - [(-\mathbf{v}^\top \mathbf{a}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{v}] \\
 &= w^2 \mathbf{a} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) - [(-\mathbf{v}^\top \mathbf{a}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^\top \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v}] \\
 &= w^2 \mathbf{a} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) - [(-\mathbf{v}^\top \mathbf{a}) \mathbf{v} + (\mathbf{v}^\top \mathbf{v}) \mathbf{a} - (\mathbf{v}^\top \mathbf{a}) \mathbf{v}] \\
 &= w^2 \mathbf{a} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) + 2(\mathbf{v}^\top \mathbf{a}) \mathbf{v} - (\mathbf{v}^\top \mathbf{v}) \mathbf{a}
 \end{aligned} \tag{171}$$

ここから，微分  $\partial \mathbf{a}' / \partial w$  と  $\partial \mathbf{a}' / \partial \mathbf{v}$  を引き出せて，

$$\frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial w} = 2(w\mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{a}) \tag{172}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial \mathbf{v}} &= -2w[\mathbf{a}]_\times + 2(\mathbf{v}^\top \mathbf{a} \mathbf{I} + \mathbf{v} \mathbf{a}^\top) - 2\mathbf{a} \mathbf{v}^\top \\
 &= 2(\mathbf{v}^\top \mathbf{a} \mathbf{I} + \mathbf{v} \mathbf{a}^\top - \mathbf{a} \mathbf{v}^\top - w[\mathbf{a}]_\times)
 \end{aligned} \tag{173}$$

結果として次のようになる．

$$\boxed{\frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^*)}{\partial \mathbf{q}} = 2 \left[ w\mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{a} \mid \mathbf{v}^\top \mathbf{a} \mathbf{I}_3 + \mathbf{v} \mathbf{a}^\top - \mathbf{a} \mathbf{v}^\top - w[\mathbf{a}]_\times \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}} \tag{174}$$

### 4.3.3 $SO(3)$ についての右ヤコビアン

$R = \text{Exp}(\boldsymbol{\theta})$  (Fig. 12) となる元  $R \in SO(3)$  と回転ベクトル  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$  について考えてみよう． $\boldsymbol{\theta}$  が  $\delta\boldsymbol{\theta}$  によって変化させられるとき，元  $R$  は変化する． $R$  の変化量を回転ベクトル  $\delta\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^3$  による  $R$  の正接空間  $SO(3)$  で表現したとき，以下を得る (図を見てほしい—ここでは何も新しいことは述べていない)

$$\text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) \oplus \delta\boldsymbol{\phi} = \text{Exp}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) \tag{175}$$

これは以下のようにも書けるだろう

$$\text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) \circ \text{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}) = \text{Exp}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) \tag{176}$$

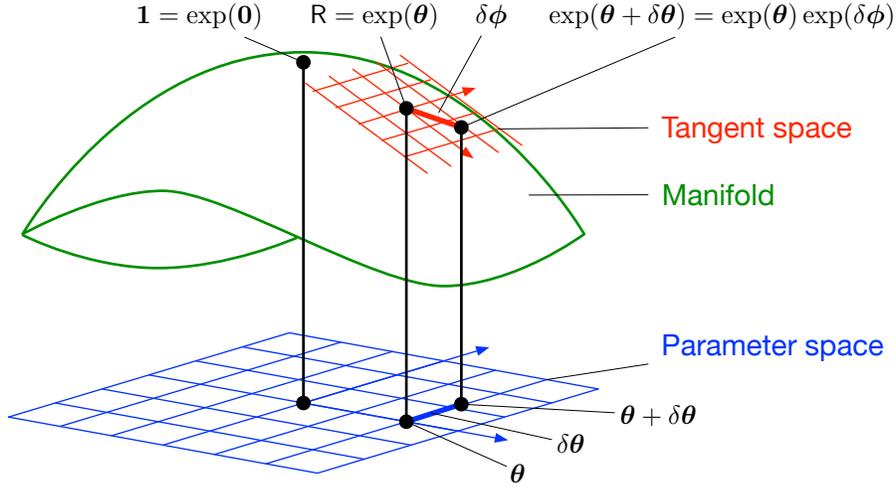


Figure 12: 右ヤコビアン  $\mathbf{J}_r = \partial\delta\phi/\partial\delta\theta$  は  $\delta\theta$  媒介変数  $\theta$  周りの変化  $\delta\theta$  を点  $\text{Exp } \theta$  における多様体に接するベクトル空間での変化  $\delta\phi$  に射影する.

さらには

$$\delta\phi = \text{Log} \left( \text{Exp}(\theta)^{-1} \circ \text{Exp}(\theta + \delta\theta) \right) = \text{Exp}(\theta + \delta\theta) \ominus \text{Exp}(\theta) \quad (177)$$

極限では、 $\delta\theta$  の関数としての  $\delta\phi$  の変化はヤコビ行列を与え、

$$\frac{\partial\delta\phi}{\partial\delta\theta} = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta\phi}{\delta\theta} = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\text{Exp}(\theta + \delta\theta) \ominus \text{Exp}(\theta)}{\delta\theta} \quad (178)$$

この表現は (166) の特別な場合で、すなわちこれは  $\mathbb{R}^3$  から  $SO(3)$  への関数  $f(\theta) = \text{Exp}(\theta)$  の微分である. このヤコビ行列は  $SO(3)$  の右ヤコビアンとして知られ、次のように定義される.

$$\mathbf{J}_r(\theta) \triangleq \frac{\partial \text{Exp}(\theta)}{\partial \theta} \quad (179)$$

この表現は使われた媒介変数表示とは独立していて、実際にはそれぞれの媒介変数表示に表現される. (166) を使うと、

$$\mathbf{J}_r(\theta) = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\text{Exp}(\theta + \delta\theta) \ominus \text{Exp}(\theta)}{\delta\theta} \quad (180)$$

$$= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(\text{Exp}(\theta)^\top \text{Exp}(\theta + \delta\theta))}{\delta\theta} \quad \text{if using } \mathbf{R} \quad (181)$$

$$= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(\text{Exp}(\theta)^* \otimes \text{Exp}(\theta + \delta\theta))}{\delta\theta} \quad \text{if using } \mathbf{q} \quad (182)$$

この右ヤコビアンとその逆元は閉形式 (Chirikjian, 2012, page 40) で求められて,

$$\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - \frac{1 - \cos \|\boldsymbol{\theta}\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|^2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \frac{\|\boldsymbol{\theta}\| - \sin \|\boldsymbol{\theta}\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|^3} [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \quad (183)$$

$$\mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta}]_{\times} + \left( \frac{1}{\|\boldsymbol{\theta}\|^2} - \frac{1 + \cos \|\boldsymbol{\theta}\|}{2\|\boldsymbol{\theta}\| \sin \|\boldsymbol{\theta}\|} \right) [\boldsymbol{\theta}]_{\times}^2 \quad (184)$$

$SO(3)$  の右ヤコビアンは任意の  $\boldsymbol{\theta}$  と微小量  $\delta\boldsymbol{\theta}$  について次のような性質を持っている,

$$\text{Exp}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}) \approx \text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) \text{Exp}(\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}) \quad (185)$$

$$\text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) \text{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}) \approx \text{Exp}(\boldsymbol{\theta} + \mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}) \quad (186)$$

$$\text{Log}(\text{Exp}(\boldsymbol{\theta}) \text{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta})) \approx \boldsymbol{\theta} + \mathbf{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta} \quad (187)$$

#### 4.3.4 回転ベクトルについてのヤコビアン

回転ベクトル  $\boldsymbol{\theta}$  についてのベクトルの回転  $\mathbf{a}' = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} \mathbf{a}$  は  $\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}^3$  への関数である. 回転ベクトル  $\boldsymbol{\theta}$  についてのこれの微分は (163) や前の結果を利用したり, (185) を用いて,

$$\frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^*)}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial(\mathbf{R} \mathbf{a})}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}} = \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}\} \mathbf{a} - \mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} \mathbf{a}}{\delta\boldsymbol{\theta}} \quad \leftarrow (163)$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} \text{Exp}(\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\}) \mathbf{a}}{\delta\boldsymbol{\theta}} \quad \leftarrow (185)$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\}(\mathbf{I} + [\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}) - \mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\}) \mathbf{a}}{\delta\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} [\mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times} \mathbf{a}}{\delta\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \lim_{\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} -\frac{\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta}) \delta\boldsymbol{\theta}}{\delta\boldsymbol{\theta}}$$

$$= -\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})$$

ここで  $\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} \triangleq \text{Exp}(\boldsymbol{\theta})$  である. まとめると,

$$\boxed{\frac{\partial(\mathbf{q} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{q}^*)}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial(\mathbf{R} \mathbf{a})}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{R}\{\boldsymbol{\theta}\} [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{J}_r(\boldsymbol{\theta})} \quad (188)$$

#### 4.3.5 回転の合成のヤコビアン

$SO(3)$  の合成  $\mathbf{P} = \mathbf{Q} \circ \mathbf{R}$  について考えてみよう. これはクォータニオンか行列形式で実行される.

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}_{\theta} \otimes \mathbf{r}_{\phi} \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\theta} \mathbf{R}_{\phi} \quad (189)$$

下付き文字は正接空間におけるベクトルの摂動の名前を示している．これらは  $SO(3)$  から  $SO(3)$  への関数で，したがってこの微分を記述するために (165) を用いる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q \circ R}{\partial Q} &= \frac{\partial \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{r}_\phi}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{((\mathbf{Q}_\theta \oplus \delta \boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}_\phi) \ominus (\mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi)}{\delta \boldsymbol{\theta}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}[(\mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi)^\top (\mathbf{Q}_\theta \text{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}_\phi)]}{\delta \boldsymbol{\theta}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}[\mathbf{R}_\phi^\top \text{Exp}(\delta \boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}_\phi]}{\delta \boldsymbol{\theta}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}[\text{Exp}(\mathbf{R}_\phi^\top \delta \boldsymbol{\theta})]}{\delta \boldsymbol{\theta}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_\phi^\top \delta \boldsymbol{\theta}}{\delta \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{R}_\phi^\top
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q \circ R}{\partial R} &= \frac{\partial \mathbf{q}_\theta \otimes \mathbf{r}_\phi}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \frac{\partial \mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \lim_{\delta \boldsymbol{\phi} \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{Q}_\theta (\mathbf{R}_\phi \oplus \delta \boldsymbol{\phi})) \ominus (\mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi)}{\delta \boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\phi} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}[(\mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi)^\top (\mathbf{Q}_\theta \mathbf{R}_\phi \text{Exp}(\delta \boldsymbol{\phi}))]}{\delta \boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\phi} \rightarrow 0} \frac{\text{Log}[\text{Exp}(\delta \boldsymbol{\phi})]}{\delta \boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta \boldsymbol{\phi} \rightarrow 0} \frac{\delta \boldsymbol{\phi}}{\delta \boldsymbol{\phi}} = \mathbf{I}
\end{aligned}$$

## 4.4 摂動，不確定性，ノイズ

### 4.4.1 局所的な摂動

摂動を受けた方向  $\tilde{\mathbf{q}}$  は摂動を受けていない方向  $\mathbf{q}$  と微小な局所的な摂動  $\Delta \mathbf{q}_\mathcal{L}$  の合成として表される．ハミルトンの慣習で，この局所的な摂動は合成積の右側に現れる．そして，比較として同等の行列も記しておく．

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \otimes \Delta \mathbf{q}_\mathcal{L} \qquad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \Delta \mathbf{R}_\mathcal{L} \qquad (190)$$

これらの局所的な摂動  $\Delta \mathbf{q}_\mathcal{L}$  (or  $\Delta \mathbf{R}_\mathcal{L}$ ) は  $\Delta \boldsymbol{\phi}_\mathcal{L} = \mathbf{u} \Delta \phi_\mathcal{L}$  による同等なベクトルから簡単に得られ，指数空間を用いることで正接空間内に定義される．これは次のようになる．

$$\tilde{\mathbf{q}}_\mathcal{L} = \mathbf{q}_\mathcal{L} \otimes \text{Exp}(\Delta \boldsymbol{\phi}_\mathcal{L}) \qquad \tilde{\mathbf{R}}_\mathcal{L} = \mathbf{R}_\mathcal{L} \cdot \text{Exp}(\Delta \boldsymbol{\phi}_\mathcal{L}) \qquad (191)$$

これは局所的な摂動の表現を導き，

$$\Delta \boldsymbol{\phi}_\mathcal{L} = \text{Log}(\mathbf{q}_\mathcal{L}^* \otimes \tilde{\mathbf{q}}_\mathcal{L}) = \text{Log}(\mathbf{R}_\mathcal{L}^\top \cdot \tilde{\mathbf{R}}_\mathcal{L}) \qquad (192)$$

もし摂動角  $\Delta\phi_{\mathcal{L}}$  が小さければクォータニオンや回転行列の摂動は線形の項まで (101) と (69) のテイラー展開から概算できる。

$$\Delta\mathbf{q}_{\mathcal{L}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\Delta\phi_{\mathcal{L}} \end{bmatrix} \quad \Delta\mathbf{R}_{\mathcal{L}} \approx \mathbf{I} + [\Delta\phi_{\mathcal{L}}]_{\times} \quad (193)$$

したがって摂動は実際の方向における多様体  $SO(3)$  に接する局所的なベクトル空間  $\Delta\phi_{\mathcal{L}}$  に特定される。例えば、これらの摂動の共分散行列、すなわち通常の  $3 \times 3$  の共分散行列をこのベクトル空間内で表現することは有用である。

#### 4.4.2 大域的な摂動

大域的に定義された摂動や関連する微分について考えることは可能で、実際に知りたいところである。大域的な摂動は合成積の左側に現れ、すなわち、

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\mathcal{G}} = \text{Exp}(\Delta\phi_{\mathcal{G}}) \otimes \mathbf{q}_{\mathcal{G}} \quad \tilde{\mathbf{R}}_{\mathcal{G}} = \text{Exp}(\Delta\phi_{\mathcal{G}}) \cdot \mathbf{R}_{\mathcal{G}} \quad (194)$$

これは大域的な摂動を導き、

$$\Delta\phi_{\mathcal{G}} = \text{Log}(\tilde{\mathbf{q}}_{\mathcal{G}} \otimes \mathbf{q}_{\mathcal{G}}^*) = \text{Log}(\tilde{\mathbf{R}}_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{R}_{\mathcal{G}}^{\top}) \quad (195)$$

繰り返しになるが、これらの摂動は原点の  $SO(3)$  多様体に接するベクトル空間  $\Delta\phi_{\mathcal{G}}$  に特定されうる。

#### 4.5 クォータニオンの時間微分

局所的な摂動をベクトル空間において表現すると、簡単に時間微分の式を作ることができる。

$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$  を基準状態、 $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}(t + \Delta t)$  を摂動した状態と考え、時間微分の定義

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \quad (196)$$

を適用して以下を得る。

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}}(t) \triangleq \frac{d\phi_{\mathcal{L}}(t)}{dt} \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_{\mathcal{L}}}{\Delta t} \quad (197)$$

このとき、 $\Delta\phi_{\mathcal{L}}$  はローカル座標系における微小角であり、 $\mathbf{q}$  によって定義されたローカル座標系における角速度ベクトルに対応する。

クォータニオンの時間微分は以下のように導かれる (回転行列についても同様に行える).

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}} &\triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q} \otimes \Delta \mathbf{q}_{\mathcal{L}} - \mathbf{q}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q} \otimes \left( \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta \phi_{\mathcal{L}}/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \phi_{\mathcal{L}}/2 \end{bmatrix}}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{198}$$

$\boldsymbol{\omega}$  を以下のように定義する.

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \triangleq [\boldsymbol{\omega}]_R = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^T \\ \boldsymbol{\omega} & -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{199}$$

これによって (198) と (17) から以下を得る (行列についても同様である).

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}}) \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}} \qquad \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}}]_{\times}} \tag{200}$$

これらの式はもちろん回転群  $SO(3)$  の枠組みで展開した (99) と (67) に等しい. しかし興味深いことに, ここではローカルな角速度  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{L}}$  を用いて特定の参照座標系への変換を記述することができる. これは演算子  $\mathbf{q}$  と  $\mathbf{R}$  に正確に幾何的解釈を加えたために可能となっている. この観点から, (200) は, 角速度をローカル座標系で表現したときの, 参照座標系の方向の変化を表している.

グローバル座標系における摂動に関する時間微分は (198) と同様に展開して, 以下のようになる.

$$\boxed{\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}} \otimes \mathbf{q} \qquad \dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}}]_{\times} \mathbf{R}} \tag{201}$$

このとき

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{G}}(t) \triangleq \frac{d\phi_{\mathcal{G}}(t)}{dt} \tag{202}$$

がグローバル座標系における角速度ベクトルである. (201) は, 角速度をグローバル座標系で表現したときの, 参照座標系の方向の変化を表している.

#### 4.5.1 グローバル座標系からローカル座標系への変換における関係式

前項から，ローカル座標系における角速度とグローバル座標系における角速度の間に次のような関係があることに注目したい．

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_G \otimes \mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_L \quad (203)$$

そして共役クォータニオンを後ろから掛けると，次のようになる．

$$\boldsymbol{\omega}_G = \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_L \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_L \quad (204)$$

同様に，微小時間  $\Delta t$  で  $\Delta \phi_R \approx \boldsymbol{\omega} \Delta t$  を考えると，次のようになる．

$$\Delta \phi_G = \mathbf{q} \otimes \Delta \phi_L \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{R} \Delta \phi_L \quad (205)$$

つまり，クォータニオンまたは回転行列を用いて，角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  と微小角度変化  $\Delta \phi$  を，座標変換によってあたかも通常のベクトルのように変換することができる．これは  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \boldsymbol{\omega}$  または  $\Delta \phi = \mathbf{u} \Delta \phi$  として，回転軸ベクトル  $\mathbf{u}$  が普通，次のように変換されることに注目すればわかる．

$$\mathbf{u}_G = \mathbf{q} \otimes \mathbf{u}_L \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{R} \mathbf{u}_L \quad (206)$$

#### 4.5.2 クォータニオン積の時間微分

以下のように，積の微分に対して一般に成り立つ公式を用いる．

$$(\dot{\mathbf{q}}_1 \otimes \mathbf{q}_2) = \dot{\mathbf{q}}_1 \otimes \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \otimes \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (\dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_2) = \dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{R}}_2 \quad (207)$$

しかしクォータニオンの積は可換ではないため，被演算子の順番には厳しく注意する必要がある．スカラーにおいては成り立つことが成り立たずに  $(\dot{\mathbf{q}}^2) \neq 2 \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}}$  となり，次の式が成立する．

$$(\dot{\mathbf{q}}^2) = \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}} \quad (208)$$

#### 4.5.3 その他微分に関する有用な式

ローカル座標系における角速度の式を次のように導ける．

$$\boldsymbol{\omega}_L = 2 \dot{\mathbf{q}}^* \otimes \dot{\mathbf{q}} \quad [\boldsymbol{\omega}_L]_x = \mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}} \quad (209)$$

また，グローバル座標系における角速度の式を次のように導ける．

$$\boldsymbol{\omega}_G = 2 \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^* \quad [\boldsymbol{\omega}_G]_x = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top \quad (210)$$

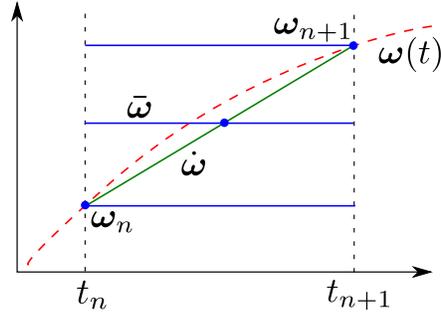


Figure 13: 積分の角速度近似値. 赤：真の速度 青：0次近似（下から上へ：前進，中心，後退）  
緑：1次近似

## 4.6 角速度の時間積分

回転をクォータニオン表現で時間的に累算するには，角速度の定義に適した微分方程式を積分すれば良い．つまり，ローカルな定義では (200)，グローバルな定義では (201) を積分すれば良い．工学上の利用では，機体に取り付けられたセンサーによって角速度を計測するので，ここでは離散的な時刻  $t_n = n\Delta t$  でのローカル座標系における角速度  $\omega(t_n)$  を用いる．ここではこのケースにのみ注目し，微分方程式 (200) を利用する．

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{q}(t) \otimes \omega(t) \quad (211)$$

時間  $t = t_n$  まわりの  $\mathbf{q}(t_n + \Delta t)$  のテイラー展開に基づいて，0次・1次積分を展開する (Figs. 13 と 14)．ここで  $\mathbf{q} \triangleq \mathbf{q}(t)$  と  $\mathbf{q}_n \triangleq \mathbf{q}(t_n)$  ( $\omega$  についても同様) に注意する．テイラー展開は次のようになる．

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{q}}_n \Delta t + \frac{1}{2!} \ddot{\mathbf{q}}_n \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \dddot{\mathbf{q}}_n \Delta t^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{q}^{(4)}_n \Delta t^4 + \dots \quad (212)$$

上記の  $\mathbf{q}_n$  の逐次微分は， $\dot{\omega} = 0$  として，クォータニオン微分の式 (211) を繰り返し適用することで簡単に求めることができ，次の式を得る．

$$\dot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{2} \mathbf{q}_n \omega_n \quad (213a)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{2^2} \mathbf{q}_n \omega_n^2 + \frac{1}{2} \mathbf{q}_n \dot{\omega} \quad (213b)$$

$$\dddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{2^3} \mathbf{q}_n \omega_n^3 + \frac{1}{4} \mathbf{q}_n \dot{\omega} \omega_n + \frac{1}{2} \mathbf{q}_n \omega_n \dot{\omega} \quad (213c)$$

$$\mathbf{q}_n^{(i \geq 4)} = \frac{1}{2^i} \mathbf{q}_n \omega_n^i + \dots \quad (213d)$$

ここでは表記の便宜上， $\otimes$  の記号は省略した．つまり，すべての積と  $\omega$  の累乗はクォータニオン積の観点から解釈されなければならない．

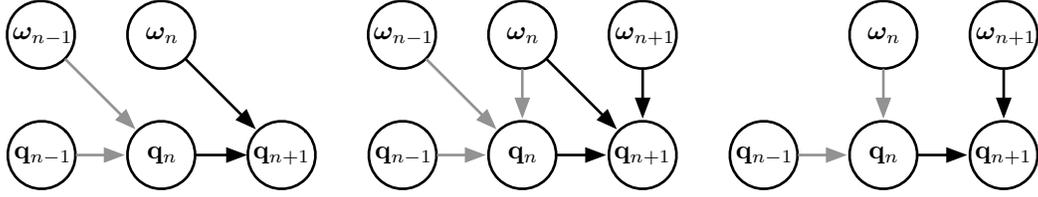


Figure 14: 連続する2つの時間ステップの積分スキーム（灰色と黒の矢印のセット）. 左：前進積分. 中央：中心積分と一次積分. 右：後退積分.

#### 4.6.1 0次積分

**前進積分** 角速度  $\omega_n$  が時間  $[t_n, t_{n+1}]$  において一定であるとき， $\dot{\omega} = 0$  であるから，(212) は次のようになる．

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \left( 1 + \frac{1}{2}\omega_n \Delta t + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{2}\omega_n \Delta t \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{2}\omega_n \Delta t \right)^3 + \dots \right) \quad (214)$$

この式には  $e^{\omega_n \Delta t/2}$  のテイラー展開 (40) が含まれていることがわかる．(101) から，この指数は回転を表すクォータニオン  $\Delta\theta = \omega_n \Delta t$  に等しく，

$$e^{\omega \Delta t/2} = \text{Exp}(\omega \Delta t) = \mathbf{q}\{\omega \Delta t\} = \begin{bmatrix} \cos(\|\omega\| \Delta t/2) \\ \frac{\omega}{\|\omega\|} \sin(\|\omega\| \Delta t/2) \end{bmatrix}$$

であるから，

$$\boxed{\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\omega_n \Delta t\}} \quad (215)$$

**後退積分** 時間  $\Delta t$  の間の速度は  $\Delta t$  秒後に測定された速度  $\omega_{n+1}$  に等しいと考えることもできる．これも同様に，時間  $t_{n+1}$  まわりの  $\mathbf{q}_n$  のテイラー展開を適用して，次のようになる．

$$\mathbf{q}_{n+1} \approx \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\omega_{n+1} \Delta t\} \quad (216)$$

後退積分は実時間で角速度の計測が行われる状態において一般的な積分の手法であることを述べておきたい．つまりは積分は最新の観測 ( $t_{n+1}$ ) によって行われるためである．より分かりやすくするために， $\{n, n+1\}$  の代わりに  $\{n-1, n\}$  を用いて式を書き直す．

$$\boxed{\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_{n-1} \otimes \mathbf{q}\{\omega_n \Delta t\}} \quad (217)$$

**中心積分** 同様に，速度が時間  $\Delta t$  の中心において一定であると考えれば（これは必ずしも  $\Delta t$  のちょうど真ん中の速度である必要はない）

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_{n+1} + \omega_n}{2} \quad (218)$$

となり，次の式を得る．

$$\boxed{\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\bar{\omega} \Delta t\}} \quad (219)$$

#### 4.6.2 1次積分

角速度  $\omega(t)$  はいま，時間に対して線形である．一次微分値は定数で，それより高次のものはすべて0である．

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} \quad (220)$$

$$\dot{\omega} = \ddot{\omega} = \dots = 0 \quad (221)$$

中央値  $\bar{\omega}$  を  $\omega_n$  と  $\dot{\omega}$  を用いて表すことができ，

$$\bar{\omega} = \omega_n + \frac{1}{2} \dot{\omega} \Delta t \quad (222)$$

となる．また，クォータニオンの微分 (213) に現れる  $\omega_n$  の累乗をより便利な  $\bar{\omega}$  と  $\dot{\omega}$  を用いて表現できて，

$$\omega_n = \bar{\omega} - \frac{1}{2} \dot{\omega} \Delta t \quad (223a)$$

$$\omega_n^2 = \bar{\omega}^2 - \frac{1}{2} \bar{\omega} \dot{\omega} \Delta t - \frac{1}{2} \dot{\omega} \bar{\omega} \Delta t + \frac{1}{4} \dot{\omega}^2 \Delta t^2 \quad (223b)$$

$$\omega_n^3 = \bar{\omega}^3 - \frac{3}{2} \bar{\omega}^2 \dot{\omega} \Delta t + \frac{3}{4} \bar{\omega} \dot{\omega}^2 \Delta t^2 + \frac{1}{8} \dot{\omega}^3 \Delta t^3 \quad (223c)$$

$$\omega_n^4 = \bar{\omega}^4 + \dots \quad (223d)$$

クォータニオンの微分にこれらを代入したうえで，テイラー展開 (212) を適用し，適切に並び替えると，次の式を得る．

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q} \left( 1 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \Delta t + \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{2} \bar{\omega} \Delta t \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{1}{2} \bar{\omega} \Delta t \right)^3 + \dots \right) \quad (224a)$$

$$+ \mathbf{q} \left( -\frac{1}{4} \dot{\omega} + \frac{1}{4} \dot{\omega} \right) \Delta t^2 \quad (224b)$$

$$+ \mathbf{q} \left( -\frac{1}{16} \bar{\omega} \dot{\omega} - \frac{1}{16} \dot{\omega} \bar{\omega} + \frac{1}{24} \dot{\omega} \bar{\omega} + \frac{1}{12} \bar{\omega} \dot{\omega} \right) \Delta t^3 \quad (224c)$$

$$+ \mathbf{q} \left( \dots \right) \Delta t^4 + \dots \quad (224d)$$

上記の式では (224a) にべき級数  $e^{\bar{\omega} \Delta t / 2} = \mathbf{q}\{\bar{\omega} \Delta t\}$  が含まれ，(224b) は消え，(224d) は無視できる高次の項である．よって簡単に直した後，次の式を得る (ここでは  $\otimes$  表記に戻す)．

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\bar{\omega} \Delta t\} + \frac{\Delta t^3}{48} \mathbf{q}_n \otimes (\bar{\omega} \otimes \dot{\omega} - \dot{\omega} \otimes \bar{\omega}) + \dots \quad (225)$$

$\dot{\omega}$  と  $\bar{\omega}$  に，定義である (220) と (218) を代入することで，

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\bar{\omega} \Delta t\} + \frac{\Delta t^2}{48} \mathbf{q}_n \otimes (\omega_n \otimes \omega_{n+1} - \omega_{n+1} \otimes \omega_n) + \dots \quad (226)$$

これは (Trawny and Roumeliotis, 2005) の結果に等しいが、ハミルトンの慣習を用いており、また、行列式の形式の代わりにクォータニオンを用いている。最終的に、 $\mathbf{a}_v \otimes \mathbf{b}_v - \mathbf{b}_v \otimes \mathbf{a}_v = 2\mathbf{a}_v \times \mathbf{b}_v$  であるから、(33) を参照して、別の表現である次の式を得る。

$$\mathbf{q}_{n+1} \approx \mathbf{q}_n \otimes \left( \mathbf{q}\{\bar{\omega}\Delta t\} + \frac{\Delta t^2}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_{n+1} \end{bmatrix} \right) \quad (227)$$

この形式では和の第一項は0次の中心積分(219)である。第二項は二次の補正項で、 $\boldsymbol{\omega}_n$  と  $\boldsymbol{\omega}_{n+1}$  が平行のとき<sup>22</sup>、つまり  $t_n$  から  $t_{n+1}$  の間で回転軸が変化していないときに消える。

**回転軸が固定の場合** ここでは  $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{u}(t)\omega(t)$  とし、 $\mathbf{u}$  を回転軸と呼ぶ。回転軸  $\mathbf{u}$  が固定の場合、 $\boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_{n+1} = 0$  となり、したがって以下が成り立つ。

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\mathbf{u}\bar{\omega}\Delta t\} \quad (228)$$

この結果は、実は  $\boldsymbol{\omega}(t)$  の1階微分に限らないケースで興味深い。実際には、回転軸が固定であれば、あるクォータニオンへの無限小回転は可換になり、つまり

$$\exp(\mathbf{u}\omega_1\delta t_1)\exp(\mathbf{u}\omega_2\delta t_2) = \exp(\mathbf{u}\omega_2\delta t_2)\exp(\mathbf{u}\omega_1\delta t_1) = \exp(\mathbf{u}(\omega_1\delta t_1 + \omega_2\delta t_2)),$$

したがって次の恒等式が得られる。

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \otimes \exp\left(\frac{\mathbf{u}}{2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega(t) dt\right) \quad (229a)$$

$$= \mathbf{q}_n \otimes \exp(\mathbf{u}\Delta\theta_n/2) \quad (229b)$$

$$= \mathbf{q}_n \otimes \mathbf{q}\{\mathbf{u}\Delta\theta_n\} \quad (229c)$$

このとき  $\Delta\theta_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \omega(t) dt \in \mathbb{R}$  は時間  $[t_n, t_{n+1}]$  の間に回転した合計の角度である。

**回転軸が変化する場合** 明らかに、(227) の和の第2項は、 $\boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_{n+1} \neq 0$  を通して回転軸が変化することによる積分された方向への影響を捉えている。実用上、IMUの通常のサンプリング時間  $\Delta t \leq 0.01s$  と慣性によって  $\boldsymbol{\omega}_n$  と  $\boldsymbol{\omega}_{n+1}$  はほとんど平行であることから、第2項の大きさのオーダーは  $10^{-6}\|\boldsymbol{\omega}\|^2$  かそれより小さい。 $\boldsymbol{\omega}\Delta t$  についてのより高次の項はさらに小さく、無視できる。

すべての0次積分は構造上、単位クォータニオンになるが(2つの単位クォータニオンの積として計算されるため)、(227) の和より、1次積分の場合はそうでないことにも注意してほしい。したがって、1次積分を使用する場合、たとえ和が小さくても、クォータニオンのノルムの時間変化に注意して、必要であれば  $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$  を用いて正規化を再度実行しなければならない。回転軸が固定であるという仮定が成り立つ場合にのみ、(228) も成立し、このときは正規化も必要ない。

<sup>22</sup>(226) から、クォータニオン積が可換であればこの項は常に消滅するが、可換でないことに注意。

## 5 IMU（慣性観測装置）を用いたシステムの誤差状態キネマティクス

### 5.1 動機

空間における姿勢を表現するべく、バイアスやノイズを含む加速度センサとジャイロセンサの測定値を統合しハミルトンのクォータニオンを用いて慣性系のキネマティクスの誤差状態方程式を記述したい。

加速度センサとジャイロセンサの測定値は通常慣性観測装置 (IMU) から得られる。IMU の測定値を統合することは推定航法による測位システムに通じているが、これは時間経過とともにドリフトを生じる。ドリフトを避けるには、この情報を GPS や画像等による絶対位置の測定値と融合させる必要がある。

誤差状態カルマンフィルタ (ESKF) はこの目的のために使用される手法の一つである。カルマンフィルタの枠組みにおいて ESKF の最も注目すべき点は以下の通りである (Madyastha et al., 2011)。

- 姿勢表現のパラメータ数は最小であり（すなわち、自由度と同じ数のパラメータを持つ）、過剰なパラメータ化（または冗長性）に関する問題や、一般に制約を課すことによって生じる複雑な共分散行列の特異点のリスクを回避できる。
- 誤差状態システムは常に原点付近ではたらくため、パラメータの特異点やジンバルロックなどが問題になりにくく、常に線形化の妥当性が保証される。
- 誤差状態は常に小さく、すべての2次の積が無視できる。このため、ヤコビアン の計算が非常に簡単かつ高速に行える。ヤコビアンの中には定数であったり利用可能な状態量に等しいものさえある。
- 誤差のダイナミクスは大信号のダイナミクスがすべてノミナル状態で統合されているため低速である。すなわち、誤差を観測する唯一の手段である KF の補正を予測よりも低い速度で適用することができる。

### 5.2 誤差状態カルマンフィルタの説明

誤差状態フィルタの定式化では真の状態、ノミナル状態、誤差状態の状態量を用い、真の状態はノミナル状態と誤差状態の適当な合成（線形和、クォータニオン積、行列積）で表現される。つまり、ノミナル状態を大信号（非線形に積分可能）、誤差状態を小信号（線形に積分可能で線形ガウシアンフィルタリングに適する）と考えるのである。

誤差状態フィルタは、次のように説明できる。高周波の IMU データ  $\mathbf{u}_m$  はノミナル状態  $\mathbf{x}$  に統合される。このノミナル状態は、ノイズ項  $\mathbf{w}$  やその他の可能性のあるモデルの不完全性を考慮に入れていない。その結果、誤差が蓄積される。これらの誤差は誤差状態  $\delta\mathbf{x}$  に集約され、誤差状態カルマンフィルタ (ESKF) で推定されるが、この時これらの誤差はすべてのノイズと摂動を含んでいる。誤差状態は小信号の状態量で構成され、その伝搬は（時変）線形力学系で正しく定義され、そのダイナミクス、制御、観測に関する行列はノミナル状態量から計算される。ノミナル状態の統合と並行して、ESKF は誤差状態のガ

ウス推定値を予測する。この推定値を修正するための他の測定値がないため、これはあくまで予測にとどまる。フィルタ補正はIMU以外の情報（GPS、画像など）が到着したときに実行される。この情報は誤差を観測可能にすることができるが、一般にノミナル状態よりも更新頻度が低い。この補正により、誤差状態の事後ガウス推定値が得られる。補正の後、誤差状態の平均はノミナル状態に反映され、その後ゼロにリセットされる。誤差状態の共分散行列は、このリセットを反映するように都合よく更新される。システムはこのようにして絶えず進行する。

### 5.3 連続時間系のキネマティクス

関連する全ての変数の定義を Table 3 にまとめる。ここで二つの重要な慣習上の定義に言及しておこう。

- 角速度  $\omega$  はローカルとして定義される。ジャイロセンサの測定値  $\omega_m$  は物体基準の角速度を提供するため、これにより直接使用することができる。
- また、角度誤差  $\delta\theta$  はノミナル姿勢に対してローカルとして定義される。これは必ずしも最適な方法ではないが、ほとんどのIMU統合の研究における選択、すなわち古典的なアプローチに相当する。グローバルに定義された角度誤差がより良い特性を持つことが証明 (Li and Mourikis, 2012) されており、この点については本書の Section 7 でも検討するが、ここでの展開、例、アルゴリズムのほとんどは、このローカルに定義された角度誤差に基づいている。

#### 5.3.1 真の状態のキネマティクス

真のキネマティクスの方程式は

$$\dot{\mathbf{p}}_t = \mathbf{v}_t \quad (230a)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_t = \mathbf{a}_t \quad (230b)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2} \mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t \quad (230c)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{bt} = \mathbf{a}_w \quad (230d)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{bt} = \boldsymbol{\omega}_w \quad (230e)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_t = 0 \quad (230f)$$

ここで、真の加速度  $\mathbf{a}_t$  と角速度  $\boldsymbol{\omega}_t$  は、IMU から、機体固定座標系<sup>23</sup>におけるノイズの多いセンサの読み取り値  $\mathbf{a}_m$  と  $\boldsymbol{\omega}_m$  の形で得られ、すなわち<sup>24</sup>

<sup>23</sup> (訳者注) ここではローカル座標系を機体固定座標系と定義している。

<sup>24</sup> (232) の回転キネマティクスでは、地球の自転速度  $\boldsymbol{\omega}_E$  を無視するのが一般的で、そうしないと  $\boldsymbol{\omega}_m = \boldsymbol{\omega}_t + \mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\omega}_E + \boldsymbol{\omega}_{bt} + \boldsymbol{\omega}_n$  になってしまう。このように、地球の自転速度がゼロでないことを考慮することは、実際には非常に多くの場合不当に複雑である。しかし、ノイズやバイアスが非常に小さいハイエンドのIMUセンサを使用した場合、 $\boldsymbol{\omega}_E = 15^\circ/\text{h} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$  の値が直接測定できる可能性がある。このような場合、IMU 誤差モデルを有効に保つために、定式化において  $\boldsymbol{\omega}_E$  を無視してはならない。

Table 3: 誤差状態カルマンフィルタの全ての変数

状態量	真	ノミナル	誤差	合成	観測	ノイズ
全状態 <sup>(1)</sup>	$\mathbf{x}_t$	$\mathbf{x}$	$\delta\mathbf{x}$	$\mathbf{x}_t = \mathbf{x} \oplus \delta\mathbf{x}$		
位置	$\mathbf{p}_t$	$\mathbf{p}$	$\delta\mathbf{p}$	$\mathbf{p}_t = \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}$		
速度	$\mathbf{v}_t$	$\mathbf{v}$	$\delta\mathbf{v}$	$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$		
クォータニオン <sup>(2,3)</sup>	$\mathbf{q}_t$	$\mathbf{q}$	$\delta\mathbf{q}$	$\mathbf{q}_t = \mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q}$		
回転行列 <sup>(2,3)</sup>	$\mathbf{R}_t$	$\mathbf{R}$	$\delta\mathbf{R}$	$\mathbf{R}_t = \mathbf{R} \delta\mathbf{R}$		
角度ベクトル <sup>(4)</sup>			$\delta\boldsymbol{\theta}$	$\delta\mathbf{q} = e^{\delta\boldsymbol{\theta}/2}$ $\delta\mathbf{R} = e^{[\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}}$		
加速度センサのバイアス	$\mathbf{a}_{bt}$	$\mathbf{a}_b$	$\delta\mathbf{a}_b$	$\mathbf{a}_{bt} = \mathbf{a}_b + \delta\mathbf{a}_b$		$\mathbf{a}_w$
ジャイロセンサのバイアス	$\boldsymbol{\omega}_{bt}$	$\boldsymbol{\omega}_b$	$\delta\boldsymbol{\omega}_b$	$\boldsymbol{\omega}_{bt} = \boldsymbol{\omega}_b + \delta\boldsymbol{\omega}_b$		$\boldsymbol{\omega}_w$
重力ベクトル	$\mathbf{g}_t$	$\mathbf{g}$	$\delta\mathbf{g}$	$\mathbf{g}_t = \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}$		
加速度	$\mathbf{a}_t$				$\mathbf{a}_m$	$\mathbf{a}_n$
角速度	$\boldsymbol{\omega}_t$				$\boldsymbol{\omega}_m$	$\boldsymbol{\omega}_n$

(1)  $\oplus$  は一般的な合成を指す

(2) 非極小表現を指す

(3) グローバルに角度誤差が定義されている場合の合成式は Table 4 参照

(4) (101) や (69, 77) で定義された指数関数

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{R}_t^{\top}(\mathbf{a}_t - \mathbf{g}_t) + \mathbf{a}_{bt} + \mathbf{a}_n \quad (231)$$

$$\boldsymbol{\omega}_m = \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\omega}_{bt} + \boldsymbol{\omega}_n \quad (232)$$

ただし  $\mathbf{R}_t \triangleq \mathbf{R}\{\mathbf{q}_t\}$ . ここから、真の値を分離することができる.

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{bt} - \mathbf{a}_n) + \mathbf{g}_t \quad (233)$$

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_{bt} - \boldsymbol{\omega}_n. \quad (234)$$

上記を代入すると,

$$\dot{\mathbf{p}}_t = \mathbf{v}_t \quad (235a)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_t = \mathbf{R}_t(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{bt} - \mathbf{a}_n) + \mathbf{g}_t \quad (235b)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes (\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_{bt} - \boldsymbol{\omega}_n) \quad (235c)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{bt} = \mathbf{a}_w \quad (235d)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{bt} = \boldsymbol{\omega}_w \quad (235e)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_t = 0 \quad (235f)$$

キネマティクスが得られ, これは  $\dot{\mathbf{x}}_t = f_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  と表現できる. この系は, 状態  $\mathbf{x}_t$  を持ち, IMU のノイズの多い測定値  $\mathbf{u}_m$  に支配され, 白色ガウスノイズ  $\mathbf{w}$  によって摂動を与えられ, これらはすべて次のように定義される.

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_t \\ \mathbf{v}_t \\ \mathbf{q}_t \\ \mathbf{a}_{bt} \\ \boldsymbol{\omega}_{bt} \\ \mathbf{g}_t \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n \\ \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_w \\ \boldsymbol{\omega}_w \end{bmatrix} \quad (236)$$

上記の定式化で注目すべきは, 重力ベクトル  $\mathbf{g}_t$  がフィルタによって推定されることである. それは量が一定であることに対応した時間発展の方程式 (235f) を持っている. システムは固定された任意の既知である初期姿勢  $\mathbf{q}_t(t=0) = \mathbf{q}_0$  から始まるが, これは一般に水平面内にはないので, 初期重力ベクトルは一般に未知となる. 簡単のため通常  $\mathbf{q}_0 = (1, 0, 0, 0)$  とし,  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}\{\mathbf{q}_0\} = \mathbf{I}$  とする. 水平面を基準とした座標系で表される  $\mathbf{q}_t$  ではなく, 初期姿勢  $\mathbf{q}_0$  を基準とした座標系で表される  $\mathbf{g}_t$  を推定し, 姿勢の初期不確実性を重力方向の初期不確実性に転化させるようにする. これは線形性を改善するために行う. 実際, 式 (235b) は今, すべての不確実性をもたらす  $\mathbf{g}$  において線形であり, 初期姿勢  $\mathbf{q}_0$  は不確実性がないものとしているため,  $\mathbf{q}$  は不確実性なしに開始される. 一旦重力ベクトルが推定されてしまえば水平面が復帰し, 望みとあらば状態全体および回復された運動の軌道が推定された水平を反映するように再方向付けすることも可能である. さらなる正当化については, (Lupton and Sukkariéh, 2009) を参照されたい. もちろんこれには選択の余地があり, 読者は重力に関する方程式をすべてシステムから取り除き,  $\mathbf{g} \triangleq (0, 0, -9.8xx)$  を考慮し,  $xx$  は実験地の重力ベクトルの適切な小数点以下の値, 初期姿勢  $\mathbf{q}_0$  は不確実性を持つと考える古典的アプローチも可能である.

### 5.3.2 ノミナル状態のキネマティクス

ノミナル状態のキネマティクスは、ノイズや摂動のないモデル化されたシステムに対応する。

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (237a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \mathbf{g} \quad (237b)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes (\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b) \quad (237c)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_b = 0 \quad (237d)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = 0 \quad (237e)$$

$$\dot{\mathbf{g}} = 0 \quad (237f)$$

### 5.3.3 誤差状態のキネマティクス

誤差状態の線形化されたダイナミクスを決定することが目標である。各状態の方程式について、誤差状態について解きすべての2次の微小量を簡略化して、それらの合成を表す (Table 3 参照)。ここでは完全な誤差状態のダイナミクスを与え、その後解説と証明を行いながら進める。

$$\dot{\delta \mathbf{p}} = \delta \mathbf{v} \quad (238a)$$

$$\dot{\delta \mathbf{v}} = -\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R} \delta \mathbf{a}_b + \delta \mathbf{g} - \mathbf{R} \mathbf{a}_n \quad (238b)$$

$$\dot{\delta \boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n \quad (238c)$$

$$\dot{\delta \mathbf{a}}_b = \mathbf{a}_w \quad (238d)$$

$$\dot{\delta \boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\omega}_w \quad (238e)$$

$$\dot{\delta \mathbf{g}} = 0 \quad (238f)$$

位置、二つのバイアス、重力誤差のそれぞれの式 (238a), (238d), (238e), (238f) は、線形な方程式から導かれ、その誤差状態のダイナミクスは些細なものである。例として、真の位置の式とノミナル位置の式 (235a), (237a) に関して Table 3 の合成の式  $\mathbf{p}_t = \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}$  を用い、 $\dot{\delta \mathbf{p}}$  について解くと (238a) が得られる。速度誤差と姿勢誤差の式 (238b), (238c) は、その線形化されたダイナミクスを得るために、非線形な式 (235b), (235c) についていくつかの非自明な操作が必要である。その証明は以下の2つの章で展開される。

**式 (238b): 線形速度誤差** 速度誤差のダイナミクスである  $\dot{\delta \mathbf{v}}$  を求めたい。まず、以下の関係から始める。

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{R}(\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times}) + O(\|\delta \boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (239)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R} \mathbf{a}_B + \mathbf{g} \quad (240)$$

ここで (239) は  $\mathbf{R}_t$  の小信号近似であり, (240) では機体固定座標系における大小信号の加速度として定義された  $\mathbf{a}_B$ ,  $\delta\mathbf{a}_B$  を導入し (237b) を書き直している.

$$\mathbf{a}_B \triangleq \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b \quad (241)$$

$$\delta\mathbf{a}_B \triangleq -\delta\mathbf{a}_b - \mathbf{a}_n \quad (242)$$

こうして, 慣性座標系における真の加速度を大信号項と小信号項の合成として書くことができる.

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t(\mathbf{a}_B + \delta\mathbf{a}_B) + \mathbf{g} + \delta\mathbf{g} \quad (243)$$

ここで,  $\dot{\mathbf{v}}_t$  の式 (235b) を  $O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)$  の項を無視した 2 種類の形式 (左辺, 右辺の展開) で表すと,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} + \delta\dot{\mathbf{v}} &= \boxed{\dot{\mathbf{v}}_t} = \mathbf{R}(\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times})(\mathbf{a}_B + \delta\mathbf{a}_B) + \mathbf{g} + \delta\mathbf{g} \\ \mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{g} + \delta\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_B + \mathbf{R}[\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}\mathbf{a}_B + \mathbf{R}[\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}\delta\mathbf{a}_B + \mathbf{g} + \delta\mathbf{g} \end{aligned}$$

両辺から  $\mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{g}$  を除くと,

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}(\delta\mathbf{a}_B + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}\mathbf{a}_B) + \mathbf{R}[\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}\delta\mathbf{a}_B + \delta\mathbf{g} \quad (244)$$

2 次の項を削除し  $[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{b} = -[\mathbf{b}]_{\times}\mathbf{a}$  によって外積を変換すると,

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}(\delta\mathbf{a}_B - [\mathbf{a}_B]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta}) + \delta\mathbf{g} \quad (245)$$

(241) と (242) を用いて,

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}(-[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta} - \delta\mathbf{a}_b - \mathbf{a}_n) + \delta\mathbf{g} \quad (246)$$

項を適当に並び替えると線形速度誤差のダイナミクスが導かれる.

$$\boxed{\delta\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_b + \delta\mathbf{g} - \mathbf{R}\mathbf{a}_n} \quad (247)$$

この式をさらに綺麗にするために, 加速度センサのノイズは白色で相関がなく, 等方的であると仮定することがよくある<sup>25</sup>.

$$\mathbb{E}[\mathbf{a}_n] = 0 \quad \mathbb{E}[\mathbf{a}_n\mathbf{a}_n^{\top}] = \sigma_a^2\mathbf{I} \quad (248)$$

つまり, 共分散楕円体は原点を中心とした球体であり, 平均と共分散行列は回転に対して不変である (*Proof:*  $\mathbb{E}[\mathbf{R}\mathbf{a}_n] = \mathbf{R}\mathbb{E}[\mathbf{a}_n] = 0$  and  $\mathbf{E}[(\mathbf{R}\mathbf{a}_n)(\mathbf{R}\mathbf{a}_n)^{\top}] = \mathbf{R}\mathbb{E}[\mathbf{a}_n\mathbf{a}_n^{\top}]\mathbf{R}^{\top} = \mathbf{R}\sigma_a^2\mathbf{I}\mathbf{R}^{\top} = \sigma_a^2\mathbf{I}$ ). 加速度センサのノイズベクトルを次のように再定義しても全く問題はなく,

$$\mathbf{a}_n \leftarrow \mathbf{R}\mathbf{a}_n \quad (249)$$

以下が得られる.

$$\boxed{\delta\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_b + \delta\mathbf{g} - \mathbf{a}_n} \quad (250)$$

<sup>25</sup> XYZ3 つの加速度センサが同一でない場合, この仮定は成り立たない.

式 (238c): 姿勢誤差 角度誤差のダイナミクスである  $\delta\dot{\theta}$  を求めたい. まず以下の関係から始める.

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t \quad (251)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega} \quad (252)$$

これらは真及びノミナルのクォータニオンの導関数の定義である. 加速度の時と同様に, 明確化のため角速度の大信号と小信号の項をまとめる.

$$\boldsymbol{\omega} \triangleq \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b \quad (253)$$

$$\delta\boldsymbol{\omega} \triangleq -\delta\boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n \quad (254)$$

$\boldsymbol{\omega}_t$  はノミナル部分と誤差部分によって書き表せる.

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega} \quad (255)$$

2種類の方法(左・右の展開)で  $\dot{\mathbf{q}}_t$  を計算すると,

$$\begin{aligned} (\mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q}) &= \boxed{\dot{\mathbf{q}}_t} = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t \\ \dot{\mathbf{q}} \otimes \delta\mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \dot{\delta\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_t \\ \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega} \otimes \delta\mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \dot{\delta\mathbf{q}} &= \end{aligned}$$

逆クォータニオンをかけて  $\delta\dot{\mathbf{q}}$  を分離すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\dot{\theta} \end{bmatrix} &= \boxed{2\delta\dot{\mathbf{q}}} = \delta\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{\omega} \otimes \delta\mathbf{q} \\ &= [\mathbf{q}]_R(\boldsymbol{\omega}_t)\delta\mathbf{q} - [\mathbf{q}]_L(\boldsymbol{\omega})\delta\mathbf{q} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(\boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{\omega})^\top \\ (\boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{\omega}) & -[\boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\omega}]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}/2 \end{bmatrix} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\delta\boldsymbol{\omega}^\top \\ \delta\boldsymbol{\omega} & -[2\boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega}]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}/2 \end{bmatrix} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \end{aligned} \quad (256)$$

その結果, スカラー, ベクトルの等式を一つずつ得る.

$$0 = \delta\boldsymbol{\omega}^\top \delta\boldsymbol{\theta} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (257a)$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = \delta\boldsymbol{\omega} - [\boldsymbol{\omega}]_\times \delta\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}[\delta\boldsymbol{\omega}]_\times \delta\boldsymbol{\theta} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (257b)$$

1つ目の式は,  $\delta\boldsymbol{\omega}^\top \delta\boldsymbol{\theta} = O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)$  となり, これは2次の微小量で形成されており, あまり有用ではない. 2つ目の式は, 2次の項をすべて無視すると,

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}]_\times \delta\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\omega} \quad (258)$$

となり, 最後に (253) と (254) を適用することで, 角度誤差の線形化されたダイナミクスを得ることができる.

$$\boxed{\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b]_\times \delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n} \quad (259)$$

## 5.4 離散時間におけるシステムキネマティクス

時間間隔  $\Delta t > 0$  にて離散化を行うために，上記の微分方程式を積分し，差分方程式に変換する必要がある．積分の方法は一つとは限らない．場合によっては，完全に閉じた形の解法を使うことができる．他の場合には，異なる精度での数値積分を施すことになる．積分方法についての関連した詳細については，付録を参照されたい．

積分は次のようなサブシステムについて行われる必要がある．

1. ノミナル状態
2. 誤差状態
  - (a) 決定性の部分：状態動力学と制御
  - (b) 確率論的な部分：ノイズと摂動

### 5.4.1 ノミナル状態のキネマティクス

ノミナル状態の差分方程式は次のように書くことができる．

$$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p} + \mathbf{v} \Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \mathbf{g}) \Delta t^2 \quad (260a)$$

$$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + (\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \mathbf{g}) \Delta t \quad (260b)$$

$$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b) \Delta t\} \quad (260c)$$

$$\mathbf{a}_b \leftarrow \mathbf{a}_b \quad (260d)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \boldsymbol{\omega}_b \quad (260e)$$

$$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{g} \quad (260f)$$

(101) によると， $x \leftarrow f(x, \bullet)$  はタイプ  $x_{k+1} = f(x_k, \bullet_k)$  の時間更新を表し， $\mathbf{R} \triangleq \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}$  は現在の見かけの方向  $\mathbf{q}$  についての回転行列， $\mathbf{q}\{v\}$  は回転  $v$  についてのクォータニオンである．

より精密な積分を使うこともできるが，これ以上の情報は付録を参照されたい．

### 5.4.2 誤差状態のキネマティクス

位置と姿勢は通常通り積分を行い（この場合，App. C.2の方法に従う），パラメータ推定部分はランダムな変動を行う（App. Eを参照）．したがって，

$$\delta \mathbf{p} \leftarrow \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{v} \Delta t \quad (261a)$$

$$\delta \mathbf{v} \leftarrow \delta \mathbf{v} + (-\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R} \delta \mathbf{a}_b + \delta \mathbf{g}) \Delta t + \mathbf{v}_i \quad (261b)$$

$$\delta \boldsymbol{\theta} \leftarrow \mathbf{R}^{\top}\{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b) \Delta t\} \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{\omega}_b \Delta t + \boldsymbol{\theta}_i \quad (261c)$$

$$\delta \mathbf{a}_b \leftarrow \delta \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_i \quad (261d)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \delta \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\omega}_i \quad (261e)$$

$$\delta \mathbf{g} \leftarrow \delta \mathbf{g} \quad (261f)$$

ここで、 $\mathbf{v}_i$ ,  $\boldsymbol{\theta}_i$ ,  $\mathbf{a}_i$  と  $\boldsymbol{\omega}_i$  は、速度、方向、そしてバイアスの推定に対して適用されるランダムな運動を表し、これらは白色ガウス過程によってモデル化される。これらの平均は0であり、共分散行列はステップ時間  $\Delta t$  中の  $\mathbf{a}_n$ ,  $\boldsymbol{\omega}_n$ ,  $\mathbf{a}_w$  と  $\boldsymbol{\omega}_w$  (App. E を参照) の共分散を積分することで得られる。

$$\mathbf{V}_i = \sigma_{\mathbf{a}_n}^2 \Delta t^2 \mathbf{I} \quad [m^2/s^2] \quad (262)$$

$$\Theta_i = \sigma_{\boldsymbol{\omega}_n}^2 \Delta t^2 \mathbf{I} \quad [rad^2] \quad (263)$$

$$\mathbf{A}_i = \sigma_{\mathbf{a}_w}^2 \Delta t \mathbf{I} \quad [m^2/s^4] \quad (264)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \sigma_{\boldsymbol{\omega}_w}^2 \Delta t \mathbf{I} \quad [rad^2/s^2] \quad (265)$$

$\sigma_{\mathbf{a}_n} [m/s^2]$ ,  $\sigma_{\boldsymbol{\omega}_n} [rad/s]$ ,  $\sigma_{\mathbf{a}_w} [m/s^2\sqrt{s}]$  と  $\sigma_{\boldsymbol{\omega}_w} [rad/s\sqrt{s}]$  は IMU データシートの情報か、実験的な測定によって決まる。

### 5.4.3 誤差状態ヤコビアンと摂動行列

ヤコビアンは前節の誤差状態の差分方程式についての単純な考察から得ることができる。

これらの方程式を簡潔な形で書くためには、ノミナル状態ベクトル  $\mathbf{x}$ , 誤差状態ベクトル  $\delta\mathbf{x}$ , 入力ベクトル  $\mathbf{u}_m$ , そして摂動ベクトル  $\mathbf{i}$  を次のように考える (詳細と正当性については付録 E.1 を参照),

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{a}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\boldsymbol{\theta} \\ \delta\mathbf{a}_b \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{a}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (266)$$

このようにして、誤差状態システムは

$$\delta\mathbf{x} \leftarrow f(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_m, \mathbf{i}) = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}, \mathbf{u}_m) \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{i}, \quad (267)$$

ESKF の推定方程式は次のように表される:

$$\hat{\delta\mathbf{x}} \leftarrow \mathbf{F}_x(\mathbf{x}, \mathbf{u}_m) \cdot \hat{\delta\mathbf{x}} \quad (268)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{F}_x \mathbf{P} \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_i^\top, \quad (269)$$

$\delta\mathbf{x} \sim \mathcal{N}\{\hat{\delta\mathbf{x}}, \mathbf{P}\}$ <sup>26</sup>;  $\mathbf{F}_x$  と  $\mathbf{F}_i$  は誤差と摂動ベクトルに関する  $f()$  のヤコビアンであり、 $\mathbf{Q}_i$  は摂動の共分散行列である。

<sup>26</sup>  $x \sim \mathcal{N}\{\mu, \Sigma\}$  は、 $x$  が  $\mu$  と  $\Sigma$  という平均と共分散行列を持つガウス分布に従う確率変数であることを意味する。

ヤコビアンと上の共分散行列の表現は下に詳しく記されている．ここに現れるすべての状態依存の値はノミナル状態から直接計算される．

$$\mathbf{F}_x = \left. \frac{\partial f}{\partial \delta \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}, \mathbf{u}_m} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_x \Delta t & -\mathbf{R}\Delta t & 0 & \mathbf{I}\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}^\top \{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b)\Delta t\} & 0 & -\mathbf{I}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (270)$$

$$\mathbf{F}_i = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{i}} \right|_{\mathbf{x}, \mathbf{u}_m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Theta}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Omega}_i \end{bmatrix} \quad (271)$$

$\mathbf{F}_x$  がシステムの推移行列であり，様々な方法・精度で近似されることに特に注意すべきである．ここに最も簡潔な形（オイラー法）の一つを示す．詳細は，付録BからDを参照されたい．

誤差の平均  $\delta \mathbf{x}$  が0に初期化されているため，線型方程式(268)は常に0を返すことにも注意されたい．自分のコードではもちろん行(268)を飛ばすべきである．私はそれを書いて，何も忘れていないことを確認するためにコメントアウトしておくことを勧める．

最後に，共分散推定(269)を飛ばさないということに注意されたい．実際， $\mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_i^\top$  の項は null ではなく，したがって，どんな推定ステップでも必ずそうなるように，この共分散が継続的に大きくなる．

## 6 IMU と補完するセンサデータとの組み合わせ

GPS や画像などといった，IMU 以外の種類の情報が手に入る場合，さらなる段階を踏んで ESKF の誤差を修正する．うまく設計されているシステムにおいては，上記の修正を行うことによって，IMU のバイアスが観測可能になり，ESKF が IMU のバイアスを正しく見積もれるようにできるはずである．IMU と補完するセンサデータとの組み合わせとして可能なものは無数にあるが，最も一般的な組み合わせは GPS と IMU, 単眼カメラからの画像と IMU, ステレオカメラからの画像と IMU である．近年では，画像と IMU との組み合わせが非常に人気を得ており，ゆえに研究開発が盛んである．これらの，画像と IMU という構成は，GPS が使えない環境で使用するのにとても有用であり，携帯可能な装置（典型例はスマートフォン）のみならず，無人航空機やその他のマイコン等の小さく軽量の演算装置で実装可能である．

IMU の情報は，これまで，予測をして ESKF に用いるのに役立てられてきたが，IMU の他の情報はフィルタの誤差を修正し，IMU のバイアスを観測するのに使われている．この誤差修正は3段階からなる．

1. フィルタの誤差修正を通して誤差状態を観測する
2. 観測された誤差をノミナル状態に対して反映し計算する
3. そして、誤差状態を初期化する

これらの段階について、以降の節でより詳細を説明する。

## 6.1 フィルタ修正を通した誤差状態の観測

通常通り、以下の式のように状態に依存する情報を出力するセンサがあるものと仮定する。

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}_t) + v \quad (272)$$

ここで、 $h()$  はシステムの状態（真の状態）に関する、一般の非線形関数であり、 $v$  は以下のように共分散  $\mathbf{V}$  を持つ、白色ガウス雑音である。

$$v \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{V}\} \quad (273)$$

われわれのフィルタは誤差状態を見積もるものであるため、フィルタを修正する以下の等式<sup>27</sup>、

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^\top (\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^\top + \mathbf{V})^{-1} \quad (274)$$

$$\hat{\delta\mathbf{x}} \leftarrow \mathbf{K}(\mathbf{y} - h(\hat{\mathbf{x}}_t)) \quad (275)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P} \quad (276)$$

において、ヤコビアン行列  $\mathbf{H}$  を誤差状態  $\delta\mathbf{x}$  に関して定義し、真の状態を推定する最良の式  $\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x} \oplus \hat{\delta\mathbf{x}}$  を用いて評価する必要がある。誤差状態の平均値はこの時点では0なので（未だ観測していないため）、 $\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}$  が成立し、ノミナル状態  $\mathbf{x}$  を評価基準に使うことができ、以下ようになる。

$$\mathbf{H} \equiv \left. \frac{\partial h}{\partial \delta\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}} \quad (277)$$

### 6.1.1 フィルタ修正のためのヤコビアンの計算

上記のヤコビアンは幾つかの方法で計算することが可能である。その中で最も例示に適している方法は、連鎖律を用いた以下の方法である。

$$\mathbf{H} \triangleq \left. \frac{\partial h}{\partial \delta\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_t} \right|_{\mathbf{x}} \left. \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \delta\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}} = \mathbf{H}_x \mathbf{X}_{\delta\mathbf{x}} \quad (278)$$

<sup>27</sup>共分散の誤差修正のうち、最も簡潔な形式  $\mathbf{P} \leftarrow (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}$  を提示する。この形式の結果は、対称性の保存も正定性の保存も保証されないため、この形式は数値的な安定性を欠くことが知られている。読者諸君は、1) 対称な形式  $\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{P} - \mathbf{K}(\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^\top + \mathbf{V})\mathbf{K}^\top$  や 2) 対称かつ正のジョゼフ形式  $\mathbf{P} \leftarrow (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})^\top + \mathbf{K}\mathbf{V}\mathbf{K}^\top$  などの、より安定した形式を使ってよい。



## 6.2 観測した誤差をノミナル状態に反映し計算する

ESKF の初期化後，観測した誤差状態を，和かクォータニオン積かのいずれかの適切な合成（Table 3 参照）を使ってノミナル状態に反映する．

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} \oplus \hat{\delta\mathbf{x}} \quad (282)$$

つまり，以下のようになる．

$$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p} + \hat{\delta\mathbf{p}} \quad (283a)$$

$$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \hat{\delta\mathbf{v}} \quad (283b)$$

$$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}\} \quad (283c)$$

$$\mathbf{a}_b \leftarrow \mathbf{a}_b + \hat{\delta\mathbf{a}}_b \quad (283d)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \boldsymbol{\omega}_b + \hat{\delta\boldsymbol{\omega}}_b \quad (283e)$$

$$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{g} + \hat{\delta\mathbf{g}} \quad (283f)$$

## 6.3 ESKF を初期化する

誤差状態をノミナル状態に反映したのち，誤差状態を  $\hat{\delta\mathbf{x}}$  を初期化する．この行為は，特に姿勢の部分に強い関連がある．新しい姿勢誤差は新しいノミナル状態の姿勢座標を基準に相対的に表現されるからである．ESKF の誤差修正を完全に行うために，上記の初期化修正に応じて，誤差の共分散の誤差修正を行う必要がある．

この誤差初期化関数を  $g()$  としよう．この関数は以下のように書ける．

$$\delta\mathbf{x} \leftarrow g(\hat{\delta\mathbf{x}}) = \delta\mathbf{x} \ominus \hat{\delta\mathbf{x}} \quad (284)$$

ここで， $\ominus$  は  $\oplus$  の逆写像となる合成方法を表す．よって，ESKF の誤差を初期化する操作は，

$$\hat{\delta\mathbf{x}} \leftarrow 0 \quad (285)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{G} \mathbf{P} \mathbf{G}^\top \quad (286)$$

とかける．ここで， $\mathbf{G}$  は

$$\mathbf{G} \triangleq \left. \frac{\partial g}{\partial \delta\mathbf{x}} \right|_{\hat{\delta\mathbf{x}}} \quad (287)$$

と定義される，ヤコビアン行列である．先述のヤコビアンの誤差修正の際と同様に，このヤコビアンも姿勢誤差以外の全ての対角ブロックが単位行列となっている．ここで，完全な表記を提示し，続く節にて姿勢誤差のブロックの導出  $\partial\delta\boldsymbol{\theta}^+/\partial\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{I} - \left[\frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}\right]_{\times}$  を行う．

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} - \left[\frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}\right]_{\times} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_9 \end{bmatrix} \quad (288)$$

主要な場合においては、誤差項  $\delta\theta$  は無視することができ、簡潔にヤコビアン  $\mathbf{G} = \mathbf{I}_{18}$  となり、自明に誤差が初期化される。ESKF を実行する際、大半は上記のことが起こっているものの、この節で書かれた表記からはより正確な結果が得られ、オドメトリシステムに置ける、長期的な誤差ドリフトを減らすのに有利に働く可能性がある。

### 6.3.1 姿勢誤差に関する初期化操作のヤコビアン

新たな角度誤差  $\delta\theta^+$  を、それまでの誤差  $\delta\theta$  と観測した誤差  $\hat{\delta}\theta$  とを用いて表現したい。以下の2つの事実を考慮する。1つめは、真の姿勢は誤差の初期化（例えば  $\mathbf{q}_t^+ = \mathbf{q}_t$ ）を行っても変化しない。よって、

$$\mathbf{q}^+ \otimes \delta\mathbf{q}^+ = \mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q} \quad (289)$$

2つめは観測した誤差の平均値はノミナル状態に反映されている。((283c) と (123) とを参照)

$$\mathbf{q}^+ = \mathbf{q} \otimes \hat{\delta}\mathbf{q} \quad (290)$$

これら2つの恒等式を組み合わせることで、 $\delta\mathbf{q}^+$  は以下のように表せる。

$$\delta\mathbf{q}^+ = (\mathbf{q}^+)^* \otimes \mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q} = (\mathbf{q} \otimes \hat{\delta}\mathbf{q})^* \otimes \mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q} = \hat{\delta}\mathbf{q}^* \otimes \delta\mathbf{q} = [\hat{\delta}\mathbf{q}^*]_L \cdot \delta\mathbf{q} \quad (291)$$

$\hat{\delta}\mathbf{q}^* \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\hat{\delta}\theta \end{bmatrix}$ , を考慮すると上記の恒等式は以下のように展開することができ、

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\theta^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\hat{\delta}\theta^\top \\ -\frac{1}{2}\hat{\delta}\theta & \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\hat{\delta}\theta \\ \times \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\theta \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\|\delta\theta\|^2) \quad (292)$$

スカラーの式と、ベクトルの式を1つずつ得る。

$$\frac{1}{4}\hat{\delta}\theta^\top \delta\theta = \mathcal{O}(\|\delta\theta\|^2) \quad (293a)$$

$$\delta\theta^+ = -\hat{\delta}\theta + \left( \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\hat{\delta}\theta \\ \times \end{bmatrix} \right) \delta\theta + \mathcal{O}(\|\delta\theta\|^2) \quad (293b)$$

この2つの式のうち、一つ目の式は、ただの微小部分に関する関係に過ぎないので、一つ目の式からはあまり情報は得られない。二つ目の式からは、初期化操作を行っていることから予期される、 $\hat{\delta}\theta^+ = 0$  を示すことができる。単純な検証から以下のヤコビアンが得られる。

$$\boxed{\frac{\partial\delta\theta^+}{\partial\delta\theta} = \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\hat{\delta}\theta \\ \times \end{bmatrix}} \quad (294)$$

## 7 グローバル角度誤差を用いた ESKF

この章では、これまで使ってきたローカルな定義とは逆に、グローバル座標系で定義される角度誤差が存在することの関係を論じる。

5章と6章の議論をもう一度たどり、新たな定義によって違いが出る節の内容について詳しく述べる。

角度誤差  $\delta\theta$  のグローバルな定義は**左手系での結合**が伴う。すなわち、以下のようになる。

$$\mathbf{q}_t = \delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q}\{\delta\theta\} \otimes \mathbf{q}$$

分かりやすくするため、角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$ 、すなわち連続時間における  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}$ 、離散時間における  $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}$  をローカルに定義することを守るが、角度誤差はもちろんグローバルに定義する。

これは利便性のためにそうするのである。なぜならばジャイロセンサから得られる角速度の測定値は機体座標系、つまりローカルな座標系のものであるからである。

### 7.1 連続時間におけるシステムキネマティクス

#### 7.1.1 真の状態とノミナル状態のキネマティクス

真の状態とノミナル状態のキネマティクスは誤差を含まないため、方程式は同じになる。

#### 7.1.2 誤差状態のキネマティクス

まず誤差状態のキネマティクスの方程式を与え、その後解説と証明を行いながら進める。

$$\dot{\delta\mathbf{p}} = \delta\mathbf{v} \tag{295a}$$

$$\dot{\delta\mathbf{v}} = -[\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - b\mathbf{a}_b)]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_b + \delta\mathbf{g} - \mathbf{R}\mathbf{a}_n \tag{295b}$$

$$\dot{\delta\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}_b - \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_n \tag{295c}$$

$$\dot{\delta\mathbf{a}}_b = \mathbf{a}_w \tag{295d}$$

$$\dot{\delta\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\omega}_w \tag{295e}$$

$$\dot{\delta\mathbf{g}} = 0 \tag{295f}$$

ここで、 $\dot{\delta\mathbf{v}}$  と  $\dot{\delta\boldsymbol{\theta}}$  の方程式以外はもう一度説明しなくてよい。

特筆すべき表式について以下で解説する。

**方程式 (295b): 線形速度誤差** 速度誤差のダイナミクスである  $\dot{\delta\mathbf{v}}$  を求めたい。まず、以下の関係から始める。

$$\mathbf{R}_t = (\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times})\mathbf{R} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \tag{296}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{g} \tag{297}$$

ここで、(296)はグローバル座標系で定義された誤差を用いた $\mathbf{R}_t$ の小信号近似である。(297)では、ローカルな定義で行ったのと同様に、機体座標系における大小信号の加速度として(241)と(242)で定義した $\mathbf{a}_B$ と $\delta\mathbf{a}_B$ を導入している。

$O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)$ の項を無視した2つの異なる形(左辺の変形と右辺の変形)の $\dot{\mathbf{v}}_t$ の表式(235b)を書き下して議論を進める。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} + \delta\dot{\mathbf{v}} &= \boxed{\dot{\mathbf{v}}_t} = (\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times})\mathbf{R}(\mathbf{a}_B + \delta\mathbf{a}_B) + \mathbf{g} + \delta\mathbf{g} \\ \mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{g} + \delta\dot{\mathbf{v}} &= \quad = \mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_B + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}\mathbf{R}\mathbf{a}_B + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}\mathbf{R}\delta\mathbf{a}_B + \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}\end{aligned}$$

左辺と右辺から $\mathbf{R}\mathbf{a}_B + \mathbf{g}$ を消去すると、以下が従う。

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_B + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}\mathbf{R}(\mathbf{a}_B + \delta\mathbf{a}_B) + \delta\mathbf{g} \quad (298)$$

二次の微小項を無視し、外積( $[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{b} = -[\mathbf{b}]_{\times}\mathbf{a}$ )を適用すると、以下を得る。

$$\delta\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_B - [\mathbf{R}\mathbf{a}_B]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta} + \delta\mathbf{g} \quad (299)$$

そして最後に、(241)と(242)を思い出し、式を再び整理すると、速度誤差の時間微分の表式を得る。

$$\boxed{\delta\dot{\mathbf{v}} = -[\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b)]_{\times}\delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}\delta\mathbf{a}_b + \delta\mathbf{g} - \mathbf{R}\mathbf{a}_n} \quad (300)$$

**方程式(295c): 姿勢誤差** クォータニオンの時間微分の、真の状態とノミナル状態の定義を書くことから始める。

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t \quad (301)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega} \quad (302)$$

グローバル座標系で定義された角度誤差を用いていることに気をつける。すなわち、以下のようになる。

$$\mathbf{q}_t = \delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \quad (303)$$

ローカルに定義された誤差の場合で行ったように、大小信号の角速度(253-254)も分類する。 $\dot{\mathbf{q}}_t$ を2つの異なる方法(左辺と右辺の変形)で計算して議論を進める。

$$\begin{aligned}(\delta\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}) &= \boxed{\dot{\mathbf{q}}_t} = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes \boldsymbol{\omega}_t \\ \delta\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} + \delta\mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}} &= \quad = \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_t \\ \delta\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega} &= \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega}$ より、これはより短く書けて

$$\delta\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} = \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \delta\boldsymbol{\omega} \quad (304)$$

左辺の項と右辺の項に  $\mathbf{q}^*$  を右から掛けて、 $\mathbf{q} \otimes \delta\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{q}^* \equiv \mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}$  を思い出すと、さらに式変形を進めることができる。

$$\begin{aligned}\dot{\delta\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \delta\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{q}^* \\ &= \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes (\mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}) \\ &= \frac{1}{2}\delta\mathbf{q} \otimes \delta\boldsymbol{\omega}_G\end{aligned}\tag{305}$$

$\delta\boldsymbol{\omega}_G \triangleq \mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}$  をグローバル座標系で表される小信号の角速度とすると、

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\delta\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2\dot{\delta\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \delta\mathbf{q} \otimes \delta\boldsymbol{\omega}_G \\ &= \boldsymbol{\Omega}(\delta\boldsymbol{\omega}_G) \delta\mathbf{q} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\delta\boldsymbol{\omega}_G^\top \\ \delta\boldsymbol{\omega}_G & -[\delta\boldsymbol{\omega}_G]_\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}/2 \end{bmatrix} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)\end{aligned}\tag{306}$$

これは1つのスカラーと1つのベクトルの方程式になる。

$$0 = \delta\boldsymbol{\omega}_G^\top \delta\boldsymbol{\theta} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)\tag{307a}$$

$$\dot{\delta\boldsymbol{\theta}} = \delta\boldsymbol{\omega}_G - \frac{1}{2}[\delta\boldsymbol{\omega}_G]_\times \delta\boldsymbol{\theta} + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)\tag{307b}$$

1つ目の方程式から  $\delta\boldsymbol{\omega}_G^\top \delta\boldsymbol{\theta} = O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2)$  が得られるが、これは二次の微小項で構成されていて、あまり有用ではない。2つ目の方程式からは、二次の微小項を全て無視することで以下が得られる。

$$\dot{\delta\boldsymbol{\theta}} = \delta\boldsymbol{\omega}_G = \mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}\tag{308}$$

最後に、(254) を思い出して、グローバルな角度誤差の線形化されたダイナミクスを得る。

$$\dot{\delta\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{R}\delta\boldsymbol{\omega}_b - \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_n\tag{309}$$

## 7.2 離散時間におけるシステムキネマティクス

### 7.2.1 ノミナル状態

ノミナル状態の方程式は、誤差を含まないため、姿勢誤差がローカルに定義された場合と同じになる。

## 7.2.2 誤差状態

オイラー法による数値積分を用いて、以下の差分方程式を得る.

$$\delta \mathbf{p} \leftarrow \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{v} \Delta t \quad (310a)$$

$$\delta \mathbf{v} \leftarrow \delta \mathbf{v} + (-[\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b)]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R} \delta \mathbf{a}_b + \delta \mathbf{g}) \Delta t + \mathbf{v}_i \quad (310b)$$

$$\delta \boldsymbol{\theta} \leftarrow \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R} \delta \boldsymbol{\omega}_b \Delta t + \boldsymbol{\theta}_i \quad (310c)$$

$$\delta \mathbf{a}_b \leftarrow \delta \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_i \quad (310d)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \delta \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\omega}_i \quad (310e)$$

$$\delta \mathbf{g} \leftarrow \delta \mathbf{g}. \quad (310f)$$

## 7.2.3 誤差状態のヤコビアンと摂動行列

上の差分方程式の簡単な検証によって遷移行列が得られる.

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -[\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b)]_{\times} \Delta t & -\mathbf{R} \Delta t & 0 & \mathbf{I} \Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & -\mathbf{R} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (311)$$

角度誤差をローカルに定義したことに基づく3箇所の変化を観察する(上のヤコビアンの四角で囲った項を(270)のそれと比較されたい). これらの変化はTable 4にまとめてある.

ヤコビアンと摂動行列は、等方性を持つノイズであることと付録Eの議論を考慮すれば不変である.

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Theta}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Omega}_i \end{bmatrix} \quad (312)$$

## 7.3 IMUと補完するセンサデータとの組み合わせ

センサデータとの組み合わせは、グローバルな角度誤差を考慮するとほんの僅かに異なってくる.

これらの違いは、ESKF補正を経由した誤差状態の観測、ノミナル状態への誤差の算入、初期化段階で修正することになる.

### 7.3.1 誤差状態の観測

ローカルな誤差の定義に基づく違いは、角度誤差に対する姿勢に関する観測関数のヤコビアンにおけるブロック行列の中だけに存在する。この新しいブロック行列は以下で解説する。

(17-19) と一次近似  $\delta \mathbf{q} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$  を用いて、クォータニオン項  $\mathbf{Q}_{\delta \boldsymbol{\theta}}$  は以下のように引き出される。

$$\mathbf{Q}_{\delta \boldsymbol{\theta}} \triangleq \left. \frac{\partial(\delta \mathbf{q} \otimes \mathbf{q})}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} \right|_{\mathbf{q}} = \left. \frac{\partial(\delta \mathbf{q} \otimes \mathbf{q})}{\partial \delta \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}} \left. \frac{\partial \delta \mathbf{q}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} \right|_{\delta \boldsymbol{\theta}=0} \quad (313a)$$

$$= [\mathbf{q}]_R \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (313b)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & q_z & -q_y \\ -q_z & q_w & q_x \\ q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix} \quad (313c)$$

### 7.3.2 観測した誤差をノミナル状態に反映し計算する

ノミナル状態と誤差状態の合成  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} \oplus \hat{\delta \mathbf{x}}$  は以下のように記述される。

$$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p} + \delta \mathbf{p} \quad (314a)$$

$$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} \quad (314b)$$

$$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \{ \hat{\delta \boldsymbol{\theta}} \} \otimes \mathbf{q} \quad (314c)$$

$$\mathbf{a}_b \leftarrow \mathbf{a}_b + \delta \mathbf{a}_b \quad (314d)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b \leftarrow \boldsymbol{\omega}_b + \delta \boldsymbol{\omega}_b \quad (314e)$$

$$\mathbf{g} \leftarrow \mathbf{g} + \delta \mathbf{g} \quad (314f)$$

ここでクォータニオンの更新についての方程式だけが影響されている。これは Table 4 にまとめてある。

### 7.3.3 ESKF を初期化する

以下に従って ESKF の誤差平均は初期化され、共分散は更新される。

$$\hat{\delta \mathbf{x}} \leftarrow 0 \quad (315)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{G} \mathbf{P} \mathbf{G}^T \quad (316)$$

また、ヤコビアンは以下のようなになる。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} + \left[ \frac{1}{2} \hat{\delta\boldsymbol{\theta}} \right]_{\times} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_9 \end{bmatrix} \quad (317)$$

その特筆すべき項は以下のように表現できる。

我々の目標は古い角度誤差  $\delta\boldsymbol{\theta}$  に基づいた新しい角度誤差  $\delta\boldsymbol{\theta}^+$  の表式を得ることである。以下の事実を考慮する。

- 真の姿勢は誤差の初期化に際しても変化しない。すなわち  $\mathbf{q}_t^+ \equiv \mathbf{q}_t$  が成り立つ。これによって以下が与えられる。

$$\delta\mathbf{q}^+ \otimes \mathbf{q}^+ = \delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \quad (318)$$

- 観測誤差平均はノミナル状態に反映され、計算される ((283c) 及び (123) 参照)。

$$\mathbf{q}^+ = \hat{\delta\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} \quad (319)$$

両方の恒等式を統合して、古い姿勢誤差と観測誤差  $\hat{\delta\mathbf{q}}$  に基づいた新しい姿勢誤差の表式を得る。

$$\delta\mathbf{q}^+ = \delta\mathbf{q} \otimes \hat{\delta\mathbf{q}}^* = [\hat{\delta\mathbf{q}}^*]_R \cdot \delta\mathbf{q} \quad (320)$$

$\hat{\delta\mathbf{q}}^* \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}$ , を考慮すると、上記の恒等式は以下のように拡張できる。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}^\top \\ -\frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{I} + \left[ \frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}} \right]_{\times} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (321)$$

これはスカラーとベクトルの方程式を1つずつ与える。

$$\frac{1}{4}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}^\top \delta\boldsymbol{\theta} = \mathcal{O}(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (322a)$$

$$\delta\boldsymbol{\theta}^+ = -\hat{\delta\boldsymbol{\theta}} + \left( \mathbf{I} + \left[ \frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}} \right]_{\times} \right) \delta\boldsymbol{\theta} + \mathcal{O}(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2) \quad (322b)$$

このうち、1つ目の式は微小量同士の関係に過ぎず、あまり有益ではない。

2つ目の式からは  $\hat{\delta\boldsymbol{\theta}}^\top = 0$  を見いだすことができる。これは初期化操作について我々が期待するものである。

ヤコビアンは簡単な検証で得られる。

$$\boxed{\frac{\partial\delta\boldsymbol{\theta}^+}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I} + \left[ \frac{1}{2}\hat{\delta\boldsymbol{\theta}} \right]_{\times}} \quad (323)$$

ローカルな誤差の場合に基づく違いは Table 4 にまとめてある。

Table 4: 姿勢誤差の定義に関するアルゴリズムの相違点

	記号	ローカルな角度誤差	グローバルな角度誤差
誤差の合成	$\mathbf{q}_t$	$\mathbf{q}_t = \mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q}$	$\mathbf{q}_t = \delta\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}$
オイラー積分	$\partial\delta\mathbf{v}^+/\partial\delta\boldsymbol{\theta}$ $\partial\delta\boldsymbol{\theta}^+/\partial\delta\boldsymbol{\theta}$ $\partial\delta\boldsymbol{\theta}^+/\partial\delta\boldsymbol{\omega}_b$	$-\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \Delta t$ $\mathbf{R}^{\top}\{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b)\Delta t\}$ $-\mathbf{I}\Delta t$	$-\mathbf{R}(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b)_{\times} \Delta t$ $\mathbf{I}$ $-\mathbf{R}\Delta t$
誤差の観測	$\mathbf{Q}_{\delta\boldsymbol{\theta}}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & -q_z & q_y \\ q_z & q_w & -q_x \\ -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & q_z & -q_y \\ -q_z & q_w & q_x \\ q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix}$
誤差の反映		$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{\hat{\delta}\boldsymbol{\theta}\}$	$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q}\{\hat{\delta}\boldsymbol{\theta}\} \otimes \mathbf{q}$
誤差の初期化	$\partial\delta\boldsymbol{\theta}^+/\partial\delta\boldsymbol{\theta}$	$\mathbf{I} - \left[\frac{1}{2}\hat{\delta}\boldsymbol{\theta}\right]_{\times}$	$\mathbf{I} + \left[\frac{1}{2}\hat{\delta}\boldsymbol{\theta}\right]_{\times}$

## A ルンゲ=クッタ法

以下の形の非線形微分方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) \quad (324)$$

を差分方程式

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \int_t^{t+\Delta t} f(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau \quad (325)$$

に変形するために、有限時間  $\Delta t$  で積分することを考える。なお、 $t_n = n\Delta t$  および  $\mathbf{x}_n \triangleq \mathbf{x}(t_n)$  を仮定すれば、以下の差分方程式も等価である。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau. \quad (326)$$

最も活用されている手法の一つとしてルンゲ=クッタ法（以下、RK）が挙げられる。RK では数回の反復計算によって積分区間内の微分係数を推定し、 $\Delta t$  ごとの積分に使用する。

次項では、最も簡単なものから最も一般的なものまで、いくつかの RK の手法とその一般的な名称を示す。

注：本節での全ての資料は英語版 Wikipedia のルンゲ=クッタ法の項目から引用している。

## A.1 オイラー法

オイラー法では、微分係数  $f(\cdot)$  が積分区間に渡って一定であると仮定する。したがって次式が成立する。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot f(t_n, \mathbf{x}_n) \quad (327)$$

一般的な RK として考えるとこれは1段の RK に対応し、以下のように表される。始点における微分係数を計算し、

$$k_1 = f(t_n, \mathbf{x}_n) \quad (328)$$

その値を用いて終点における積分された値を計算する。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot k_1 \quad (329)$$

## A.2 中点法

中点法では積分に用いる微分係数が区間の中点における微分係数と等しいと仮定するとともに、中点における  $\mathbf{x}$  を計算する。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot f(t_n, \mathbf{x}_n)\right) \quad (330)$$

中点法は以下のように2段の RK として説明される。まず、前項で定義した  $k_1$  を用いてオイラー法によって中点まで積分する。

$$k_1 = f(t_n, \mathbf{x}_n) \quad (331)$$

$$\mathbf{x}(t_n + \frac{1}{2}\Delta t) = \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot k_1 \quad (332)$$

次に、この値を用いて中点における微分係数を評価すると、以下の積分が得られる。

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \mathbf{x}(t_n + \frac{1}{2}\Delta t)) \quad (333)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot k_2 \quad (334)$$

## A.3 4次ルンゲ=クッタ法

4次ルンゲ=クッタ法は単にルンゲ=クッタ法と呼ばれることも多い。本手法では、区間の始点、中点、終点における  $f()$  の値を仮定する。そして、逐次的に得られる4つの微分係数  $k_1 \dots k_4$  を用いて4段階の計算を行う。これらの微分係数つまり勾配は、区間における微分係数の4次の評価値を得るために重み付けされる。

4次ルンゲ=クッタ法は先述した2つの手法のように1つの公式として記述するよりも、小さなアルゴリズムとして記述するのが良い。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (335)$$

すなわち、増分は勾配  $k_1, k_2, k_3, k_4$  の重み付き平均であると仮定して計算される。

$$k_1 = f(t_n, \mathbf{x}_n) \quad (336)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) \quad (337)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right) \quad (338)$$

$$k_4 = f\left(t_n + \Delta t, \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot k_3\right) \quad (339)$$

これらの勾配は以下のように解釈される。

- $k_1$  は  $\mathbf{x}_n$  を用いて計算された区間の始点における勾配である。(オイラー法)
- $k_2$  は  $\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot k_1$  を用いて計算された区間の中点における勾配である。(中点法)
- $k_3$  は  $\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t \cdot k_2$  を用いて計算された区間の中点における勾配である。
- $k_4$  は  $\mathbf{x}_n + \Delta t \cdot k_3$  を用いて計算された区間の終点における勾配である。

#### A.4 一般的なルンゲ=クッタ法

より複雑な RK も存在し、誤差の低減や計算の安定性向上を目的として用いられる。それらの手法には以下の一般形が存在する。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (340)$$

ただし、

$$k_i = f\left(t_n + \Delta t \cdot c_i, \mathbf{x}_n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right) \quad (341)$$

である。つまり、反復計算の回数(手法の次数)は  $s$  であり、重みは  $b_i$ 、評価する瞬間は  $c_i$  で定義され、勾配は  $a_{ij}$  を用いて決定される。 $a_{ij}$  の構造によって、陽的 RK と陰的 RK に分類される。

- 陽的手法では全ての  $k_i$  は逐次計算され、つまり、以前に計算された値のみを用いて計算が行われる。これは行列  $[a_{ij}]$  が対角成分が 0 である下三角行列であることを意味している。(  $a_{ij} = 0$  for  $j \geq i$  ) オイラー法、中点法、4 次のルンゲ=クッタ法は陽的である。
- 陰的手法では  $[a_{ij}]$  は対角成分や上三角成分に非零要素をもつ行列であり、全ての  $k_i$  を求めるために線形の連立方程式を解く必要がある。それゆえに計算コストが高いが、陽的手法と比較して精度や安定性を向上させることができる。

より詳細な情報は専門的な文献を参照されたい。

## B 閉形式の積分方法

多くの場合、積分において閉形式にまとめることが可能である。ここで、一階線形微分方程式の場合を考えてみる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \quad (342)$$

すなわち、この関係は線形であり、区間にわたって一定である。このような場合、区間  $[t_n, t_n + \Delta t]$  で積分すると、次のようになる。

$$\mathbf{x}_{n+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_n = \Phi \mathbf{x}_n \quad (343)$$

ここで、 $\Phi$  は遷移行列として知られている。この遷移行列のテイラー展開は以下のようである。

$$\Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3\Delta t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \Delta t^k \quad (344)$$

この級数を既知の  $\mathbf{A}$  のモデルに対して書くと、結果的に既知の級数を同定できる場合がある。これにより、結果の積分を閉じた形で書くことができる。以下の3つはその一例である。

### B.1 角度誤差の積分

例えば、バイアスやノイズのない角度誤差のダイナミクス (式. (238c) の綺麗なバージョン) を考える。

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta} \quad (345)$$

その遷移行列はテイラー級数として書くことができる

$$\Phi = e^{-[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t} \quad (346)$$

$$= \mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^2 \Delta t^2 - \frac{1}{3!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^3 \Delta t^3 + \frac{1}{4!} [\boldsymbol{\omega}]_{\times}^4 \Delta t^4 - \dots \quad (347)$$

ここで  $\boldsymbol{\omega}\Delta t \triangleq \mathbf{u}\Delta\theta$ 、すなわち単位回転軸と回転角度を定義し、式.(75) を適用して項をまとめると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathbf{I} - [\mathbf{u}]_{\times} \Delta\theta + \frac{1}{2} [\mathbf{u}]_{\times}^2 \Delta\theta^2 - \frac{1}{3!} [\mathbf{u}]_{\times}^3 \Delta\theta^3 + \frac{1}{4!} [\mathbf{u}]_{\times}^4 \Delta\theta^4 - \dots \\ &= \mathbf{I} - [\mathbf{u}]_{\times} \left( \Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \frac{\Delta\theta^5}{5!} - \dots \right) + [\mathbf{u}]_{\times}^2 \left( \frac{\Delta\theta^2}{2!} - \frac{\Delta\theta^4}{4!} + \frac{\Delta\theta^6}{6!} - \dots \right) \\ &= \mathbf{I} - [\mathbf{u}]_{\times} \sin \Delta\theta + [\mathbf{u}]_{\times}^2 (1 - \cos \Delta\theta) \end{aligned} \quad (348)$$

これは閉形式の解である。

この解は、ロドリゲス回転公式.(77) によると、回転行列  $\Phi = \mathbf{R}\{-\mathbf{u}\Delta\theta\} = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top}$  からも同様に計算できる。つまり式.(346) において、式.(69) を用いれば得られる結果である。したがって、これを最終的な閉形式の結果として書いておく。

$$\boxed{\Phi = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top}}. \quad (349)$$

## B.2 単純化されたIMUの例

単純化されたIMU駆動システムで、誤差状態のダイナミクスが以下のように記述されているものを考える。

$$\dot{\delta \mathbf{p}} = \delta \mathbf{v} \quad (350a)$$

$$\dot{\delta \mathbf{v}} = -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} \quad (350b)$$

$$\dot{\delta \boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} \quad (350c)$$

ここで、 $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega})$  はIMUの測定値で、重力とセンサーのバイアスは無視している。このシステムは、状態ベクトルと行列によって定義される。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_{\theta} \\ 0 & 0 & \Theta_{\theta} \end{bmatrix} \quad (351)$$

なお文字の定義は以下のようである。

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{I} \quad (352)$$

$$\mathbf{V}_{\theta} = -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \quad (353)$$

$$\Theta_{\theta} = -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \quad (354)$$

ステップ時間  $\Delta t$  での積分は  $\mathbf{x}_{n+1} = e^{(\mathbf{A}\Delta t)} \cdot \mathbf{x}_n = \Phi \cdot \mathbf{x}_n$  となる。遷移行列  $\Phi$  は  $\mathbf{A}\Delta t$  の累乗であるテイラー展開 (344) に変形できる。一般的な形式を説明するために  $\mathbf{A}$  の累乗をいくつか記す。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_{\theta} \\ 0 & 0 & \Theta_{\theta} \end{bmatrix}, \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_{\theta} \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_{\theta} \Theta_{\theta} \\ 0 & 0 & \Theta_{\theta}^2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_{\theta} \Theta_{\theta} \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_{\theta} \Theta_{\theta}^2 \\ 0 & 0 & \Theta_{\theta}^3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_{\theta} \Theta_{\theta}^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_{\theta} \Theta_{\theta}^3 \\ 0 & 0 & \Theta_{\theta}^4 \end{bmatrix}, \quad (355)$$

以上から、 $k > 1$  で以下が成り立つように見える。

$$\mathbf{A}^{k>1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_{\theta} \Theta_{\theta}^{k-2} \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_{\theta} \Theta_{\theta}^{k-1} \\ 0 & 0 & \Theta_{\theta}^k \end{bmatrix} \quad (356)$$

$\mathbf{A}$  の  $k$  に関する累乗の項は、不変部分と  $\Theta_{\theta}$  の  $k$  に関する累乗を持つことがわかる。これらの累乗は、前節と同様に閉形式の解を導くことができる。

行列  $\Phi$  を次のように分割する。

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Phi_{pv} & \Phi_{p\theta} \\ 0 & \mathbf{I} & \Phi_{v\theta} \\ 0 & 0 & \Phi_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (357)$$

$\Phi$  の非零のブロックを一つずつ見ていく。

**自明な対角項** はじめの対角線上の2つの項については、見た目のように恒等的である。(常に1)

**回転対角項** 次に回転対角項 $\Phi_{\theta\theta}$ について、これは新しい角度誤差と古い角度誤差を関係付けるものである。この項について完全なテイラー級数は以下のようなものである。

$$\Phi_{\theta\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Theta_{\theta}^k \Delta t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [-\omega]_{\times}^k \Delta t^k \quad (358)$$

これは、前節で見たように、よく知られた回転行列に対応する。

$$\Phi_{\theta\theta} = \mathbf{R}\{\omega\Delta t\}^{\top} \quad (359)$$

**位置-速度の項** 最も単純な非対角項は $\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{v}}$ であり、以下のようなものである。

$$\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{v}} = \mathbf{P}_{\mathbf{v}}\Delta t = \mathbf{I}\Delta t \quad (360)$$

**速度-角度の項** ここで、 $\Phi_{\mathbf{v},\theta}$  項に移り、その級数を示す。

$$\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \mathbf{V}_{\theta}\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{V}_{\theta}\Theta_{\theta}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{V}_{\theta}\Theta_{\theta}^2\Delta t^3 + \dots \quad (361)$$

$$\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \Delta t\mathbf{V}_{\theta}\left(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\Theta_{\theta}\Delta t + \frac{1}{3!}\Theta_{\theta}^2\Delta t^2 + \dots\right) \quad (362)$$

これは以下のようにまとめられる。

$$\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \Delta t\mathbf{V}_{\theta} \left( \mathbf{I} + \sum_{k \geq 1} \frac{(\Theta_{\theta}\Delta t)^k}{(k+1)!} \right) \quad (363)$$

この時点では、2つの選択肢がある。1つ目は、最初の有意な項で級数を切り捨てて、 $\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \mathbf{V}_{\theta}\Delta t$  得る方法だが、これは閉形式にならない。この簡便な方法を用いた結果については、次章を参照されたい。2つ目は、 $\mathbf{V}_{\theta}$  を因数分解して、次のように書く。

$$\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \mathbf{V}_{\theta}\Sigma_1 \quad (364)$$

ただし

$$\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t + \frac{1}{2}\Theta_{\theta}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\Theta_{\theta}^2\Delta t^3 + \dots \quad (365)$$

級数 $\Sigma_1$ は、級数 $\Phi_{\theta\theta}$ (358)に以下の二つの例外を除いて似ている。

- $\Sigma_1$  の  $\Theta_{\theta}$  累乗は有理数係数  $\frac{1}{k!}$  と  $\Delta t$  の累乗と一致しない。実際、 $\Sigma_1$  の添字”1”は  $\Theta_{\theta}$  の1乗が各項で欠落していることを意味している。

- 級数の初めのいくつかの項が欠落している。ここでも、添字 "1" は、そのような用語が1つ欠落していることを示す。

最初の問題は、式.(75) を式.(354) に適用することで解決することができる。

$$\Theta_{\theta} = \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}^3}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} = \frac{-\Theta_{\theta}^3}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \quad (366)$$

この式から、直列の  $\Theta_{\theta}$  の指数を2つ増やして書くことができる。 $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  ならば以下のようになる。

$$\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t - \frac{\Theta_{\theta}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \left( \frac{1}{2}\Theta_{\theta}^2\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\Theta_{\theta}^3\Delta t^3 + \dots \right) \quad (367)$$

$\boldsymbol{\omega} = 0$  ならば  $\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t$  となる。新しい級数のすべての累乗は正しい係数で一致する。もちろん、先に述べたように、いくつかの項が欠落している。この問題は、足りない項を足したり引いたりすることで、解決することができる。次式は、 $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  のときに成り立つ閉形式の解である。

$$\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t - \frac{\Theta_{\theta}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} (\mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top} - \mathbf{I} - \Theta_{\theta}\Delta t) \quad (368)$$

したがって、最終的に次のように書くことができる。

$$\Phi_{\mathbf{v}\theta} = \begin{cases} -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times}\Delta t & \boldsymbol{\omega} \rightarrow 0 \\ -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \left( \mathbf{I}\Delta t + \frac{[\boldsymbol{\omega}]_{\times}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} (\mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top} - \mathbf{I} + [\boldsymbol{\omega}]_{\times}\Delta t) \right) & \boldsymbol{\omega} \neq 0 \end{cases} \quad (369a)$$

$$(369b)$$

**位置-角度の項** 最後に  $\Phi_{\mathbf{p}\theta}$  の項を取り上げる。そのテイラー級数は以下のものである。

$$\Phi_{\mathbf{p}\theta} = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{\mathbf{v}}\mathbf{V}_{\theta}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{P}_{\mathbf{v}}\mathbf{V}_{\theta}\Theta_{\theta}\Delta t^3 + \frac{1}{4!}\mathbf{P}_{\mathbf{v}}\mathbf{V}_{\theta}\Theta_{\theta}^2\Delta t^4 + \dots \quad (370)$$

定数項を因数分解すると次を得る。

$$\Phi_{\mathbf{p}\theta} = \mathbf{P}_{\mathbf{v}}\mathbf{V}_{\theta}\Sigma_2 \quad (371)$$

ただし

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\Theta_{\theta}\Delta t^3 + \frac{1}{4!}\Theta_{\theta}^2\Delta t^4 + \dots \quad (372)$$

ここで、 $\Sigma_2$  の添字 "2" は次のような解釈に基づくことに注意されたい。

- 級数の各項で  $\Theta_{\theta}$  の2乗が欠落している。
- 級数の最初の2項が欠落している。

ここでも、式.(366) を用いて  $\Theta_\theta$  の指数を大きくすると、以下を得る。

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2} \mathbf{I} \Delta t^2 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \left( \frac{1}{3!} \Theta_\theta^3 \Delta t^3 + \frac{1}{4!} \Theta_\theta^4 \Delta t^4 + \dots \right) \quad (373)$$

不完了な級数を閉形式に置き換える。

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2} \mathbf{I} \Delta t^2 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \left( \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega} \Delta t\}^\top - \mathbf{I} - \Theta_\theta \Delta t - \frac{1}{2} \Theta_\theta^2 \Delta t^2 \right) \quad (374)$$

最終的に以下のように導かれる。

$$\Phi_{\mathbf{p}\theta} = \begin{cases} -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \frac{\Delta t^2}{2} & \boldsymbol{\omega} \rightarrow 0 \quad (375a) \\ -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \left( \frac{1}{2} \mathbf{I} \Delta t^2 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \left( \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega} \Delta t\}^\top - \sum_{k=0}^2 \frac{(-[\boldsymbol{\omega}]_\times \Delta t)^k}{k!} \right) \right) & \boldsymbol{\omega} \neq 0 \quad (375b) \end{cases}$$

### B.3 完全な IMU の例

単純化された IMU の例での方法を一般化するために、もう少し近くから IMU 全体のケースを検討する必要がある。

完全な IMU システム式.(238) を考え、次のように構築する。

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{w} \quad (376)$$

その離散時間積分のために遷移行列

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \Delta t^k = \mathbf{I} + \mathbf{A} \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 \Delta t^2 + \dots \quad (377)$$

を計算したい。行列  $\mathbf{A}$  は疎行列 (0 の成分が多く) であり、そのブロックは元の式.(238) を調べれば容易に求めることができる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta & \mathbf{V}_a & 0 & \mathbf{V}_g \\ 0 & 0 & \Theta_\theta & 0 & \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (378)$$

前回と同様、 $A$  の累乗をいくつか書いてみる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_a & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_g \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_\theta^2 & 0 & \Theta_\theta \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^2 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_\theta^3 & 0 & \Theta_\theta^2 \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^2 & 0 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^3 & 0 & \mathbf{V}_\theta \Theta_\theta^2 \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_\theta^4 & 0 & \Theta_\theta^3 \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

基本的には、以下のようなことがわかる。

- $A$  の対角線上にある唯一の項である回転項  $\Theta_\theta$  は、累乗  $A^k$  に従って右から上に伝播していく。この伝播の影響を受けない項はすべて消滅する。この伝播は次の3点で連鎖  $\{A^k\}$  の構造に影響を与える。
- $A$  の3乗以降でスパース性が安定する。つまり、 $A$  の3乗以上で非零のブロックが現れたり消えたりすることはない。
- 左上の  $3 \times 3$  ブロックは、前の例で簡略化された IMU モデルに対応し、その例に対して変化していない。したがって、先に作った閉形式解が成立する。
- ジャイロのバイアス誤差に関連する項（5列目の項）は、同様の  $\Theta_\theta$  の累乗を用いるが、これは単純化した例で使用したのと同じ手法で解くことができる。

ここでは、遷移行列  $\Phi$  の閉形式の要素の構築に乗り出すための一般化された方法を見つけることに興味がある。ここで、級数  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  について述べたことを思い出してみよう。

- この添字は、級数の各項の  $\Theta_\theta$  の欠落している累乗と一致する。
- この添字は、級数の冒頭で欠落している項数と一致する。

これらの性質を考慮して、以下で定義される級数  $\Sigma_n(\mathbf{X}, y)$  を導入してみよう。<sup>28</sup>

$$\Sigma_n(\mathbf{X}, y) \triangleq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{X}^{k-n} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!} \mathbf{X}^k y^{k+n} = y^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!} \mathbf{X}^k y^k \quad (379)$$

ここでは、和が第  $n$  項から始まり、項が行列  $\mathbf{X}$  の  $n$  乗だけ欠ける。 $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  が  $\Sigma_n$  と  $\Sigma_0 = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^\top$  に対応することは即座にわかる。

$$\Sigma_n = \Sigma_n(\Theta_\theta, \Delta t) \quad (380)$$

ここで、遷移行列 (377) をこれらの級数の関数として書くことができる。

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}_v \Delta t & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Sigma_2 & \frac{1}{2} \mathbf{P}_v \mathbf{V}_a \Delta t^2 & \mathbf{P}_v \mathbf{V}_\theta \Sigma_3 \boldsymbol{\theta}_\omega & \frac{1}{2} \mathbf{P}_v \mathbf{V}_g \Delta t^2 \\ 0 & \mathbf{I} & \mathbf{V}_\theta \Sigma_1 & \mathbf{V}_a \Delta t & \mathbf{V}_\theta \Sigma_2 \boldsymbol{\theta}_\omega & \mathbf{V}_g \Delta t \\ 0 & 0 & \Sigma_0 & 0 & \Sigma_1 \boldsymbol{\theta}_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (381)$$

この問題は、 $\Sigma_n$  に関する一般的な閉形式の問題へと発展した。ここまでで得られた閉形式の結果を観察してみよう。

$$\Sigma_0 = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^\top \quad (382)$$

$$\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t - \frac{\Theta_\theta}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} (\mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^\top - \mathbf{I} - \Theta_\theta \Delta t) \quad (383)$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2} \mathbf{I}\Delta t^2 - \frac{1}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2} \left( \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^\top - \mathbf{I} - \Theta_\theta \Delta t - \frac{1}{2} \Theta_\theta^2 \Delta t^2 \right) \quad (384)$$

$\Sigma_3$  を展開するためには、恒等式 (366) を 2 回適用する必要がある (3 乗が足りなく、(366) を適用するたびに次数は 2 だけ増える)、次のようになる。

$$\Sigma_3 = \frac{1}{3!} \mathbf{I}\Delta t^3 + \frac{\Theta_\theta}{\|\boldsymbol{\omega}\|^4} \left( \frac{1}{4!} \Theta_\theta^4 \Delta t^4 + \frac{1}{5!} \Theta_\theta^5 \Delta t^5 + \dots \right) \quad (385)$$

そして以下のようなになる。

$$\Sigma_3 = \frac{1}{3!} \mathbf{I}\Delta t^3 + \frac{\Theta_\theta}{\|\boldsymbol{\omega}\|^4} \left( \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^\top - \mathbf{I} - \Theta_\theta \Delta t - \frac{1}{2} \Theta_\theta^2 \Delta t^2 - \frac{1}{3!} \Theta_\theta^3 \Delta t^3 \right) \quad (386)$$

<sup>28</sup>  $\mathbf{X}$  が必ずしも逆行列をもつ正方行列であると限らないため ( $\mathbf{X} = \Theta_\theta$  の場合と同様に),  $\Sigma_n$  の定義を  $\Sigma_n = \mathbf{X}^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} (y\mathbf{X})^k$  と並べ替えることは許されないことに注意する必要がある。

級数  $\Sigma_0 \dots \Sigma_3$  を注意深く観察することで、次のように  $\Sigma_n$  の一般的な閉形式が導ける。

$$\Sigma_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \mathbf{I} \Delta t^n & \boldsymbol{\omega} \rightarrow 0 & (387a) \\ \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega} \Delta t\}^\top & n = 0 & (387b) \\ \frac{1}{n!} \mathbf{I} \Delta t^n - \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} [\boldsymbol{\omega}]_\times}{\|\boldsymbol{\omega}\|^{n+1}} \left( \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega} \Delta t\}^\top - \sum_{k=0}^n \frac{(-[\boldsymbol{\omega}]_\times \Delta t)^k}{k!} \right) & n \text{ odd} & (387c) \\ \frac{1}{n!} \mathbf{I} \Delta t^n + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\|\boldsymbol{\omega}\|^n} \left( \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega} \Delta t\}^\top - \sum_{k=0}^n \frac{(-[\boldsymbol{\omega}]_\times \Delta t)^k}{k!} \right) & n \text{ even} & (387d) \end{cases}$$

遷移行列  $\Phi$  の最終結果は、 $\Sigma_n$ ,  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$  の適切な値を (381) の対応する位置に代入することで直ちに得られる。

これらの新しい  $\Sigma_n$  の式に現れる級数は、項数が有限であり、したがって効率的に計算できることに注目するとよいだろう。つまり、 $\Sigma_n$  の式は  $n < \infty$  である限り閉じた形であり、これは常にそうである。今回の例では、(381) からわかるように、 $n \leq 3$  である。

## C 切り捨てによる近似方法

前節では、我々は  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}$  という線形化された誤差状態で記述された、IMU による運動の複雑な遷移行列に対しての閉形式表現を考案した。閉形式表現は常に興味の対象とはなるだろうが、どの程度まで我々は高次の誤差や実際のアルゴリズムにおけるパフォーマンスへの影響に注意すべきかについては不透明である。

この注釈は画像と IMU や GPS と IMU のような補間するセンサーデータが比較的高頻度で観測（あるいは補完）されるシステムに関わっている。

この節では遷移行列を近似する複数の方法について考えていく。これらの方法は遷移行列はテイラー級数によって表現されるという同様の仮定から始まり、その級数を最も重要な項で切り捨てる。この切り捨てはシステムとブロックで行われうる。

### C.1 システム的な切り捨て

#### C.1.1 一次切り捨て：有限差分法

典型的で広く使われる以下の形式のシステムに対する積分方法

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$$

は微分係数の計算による有限差分法に基づいている。すなわち、

$$\dot{\mathbf{x}} \triangleq \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \delta t) - \mathbf{x}(t)}{\delta t} \approx \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t}. \quad (388)$$

これによって直ちに

$$\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{x}_n + \Delta t f(t_n, \mathbf{x}_n), \quad (389)$$

これはちょうどオイラー法になっている。積分区間の開始地点における関数  $f()$  の線形化によって

$$\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{A} \mathbf{x}_n, \quad (390a)$$

ここで  $\mathbf{A} \triangleq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t_n, \mathbf{x}_n)$  はヤコビ行列である。これは、線形化された差分方程式に対する指数的な解決方法を記述したり線形項で級数を切り捨てたり（すなわち、次の関係は前のものと同じである）することと厳密に相当する。

$$\mathbf{x}_{n+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_n \approx (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}) \mathbf{x}_n. \quad (390b)$$

これはオイラー法 (付録 A.1) と有限差分法と一次のシステムのテイラー級数の切り捨て方法はすべて同じだと意味している。

$$\boxed{\Phi \approx \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}} \quad (391)$$

簡素化された IMU の例 Section B.2 に対してはこの有限差分法によっておおよその切り捨てた行列が得られる。

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}\Delta t]_{\times} \end{bmatrix} \quad (392)$$

しかし、我々はすでに Section B.1 から回転項はまとまった  $\Phi_{\theta\theta} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}\Delta t)^{\top}$  という閉形式を持つことを知っている。

これによって遷移行列を再記述すると便利で、

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top} \end{bmatrix} \quad (393)$$

### C.1.2 N 次切り捨て

高次で切り捨てることは近似された遷移行列の精度を高めるだろう。結果の疎性を利用して精度を最大限に高める切り捨ての次数に特に興味がある。言い換えれば、後に新しい非ゼロの項が現れない次数のことである。

簡素化された IMU の例 Section B.2 ではこの次数は 2 であり、結果として

$$\Phi \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\Delta t^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & -\frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \Delta t^2 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} (\mathbf{I} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \Delta t) \Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top} \end{bmatrix} \quad (394)$$

完全な IMU の例 Section B.3 ではこの次数は 3 であり、結果として

$$\Phi \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\Delta t^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3\Delta t^3 \quad (395)$$

この完全な形式は紙面の都合でここでは与えない。 $\mathbf{A}$  や  $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3$  の表現については Section B.3 を参照すると良いだろう。

## C.2 ブロック的な切り捨て

前に説明された閉形式に対するある程度良い近似は遷移行列のそれぞれのブロックのテイラー級数を最初の重要な項で切り捨てることで導かれる。すなわち、 $\mathbf{A}$  の完全な指数を切り捨てる代わりに我々は上記を行い、それぞれのブロックに個々に注目する。したがって、切り捨てはブロックを基本として解析される必要がある。我々は二つの例でこれを考えていく。

簡素化された IMU の例 Section B.2 では、級数  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  が存在し、次のように切り捨てられる。

$$\Sigma_1 = \mathbf{I}\Delta t + \frac{1}{2}\Theta_\theta\Delta t^2 + \dots \approx \mathbf{I}\Delta t \quad (396)$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\Theta_\theta\Delta t^3 + \dots \approx \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 \quad (397)$$

これによって近似された遷移行列が導かれる。

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & -\frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \Delta t^2 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}\Delta t)^\top \end{bmatrix} \quad (398)$$

これは上で述べたシステムの一次切り捨てより正確で（ここでは右上の項が現れたため）、特に Section B で導かれた閉形式と比べたときに、まだ導出や計算も簡単である。繰り返しになるが、最下層、すなわち  $\Phi_{\theta\theta} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}\Delta t)^\top$  の項には閉形式を利用したことを見てほしい。

一般的な場合では、これは級数の最初の項による  $\Sigma_0$  を除くそれぞれの  $\Sigma_n$  を近似するのに十分である。すなわち、

$$\Sigma_0 = \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^\top, \quad \Sigma_{n>0} \approx \frac{1}{n!}\mathbf{I}\Delta t^n \quad (399)$$

完全な IMU の例では、 $\Sigma_n$  を (381) に与えることは近似された遷移行列を生み出し、

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & -\frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \Delta t^2 & -\frac{1}{2}\mathbf{R}\Delta t^2 & \frac{1}{3!}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \Delta t^3 & \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \Delta t & -\mathbf{R}\Delta t & \frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times \Delta t^2 & \mathbf{I}\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^\top & 0 & -\mathbf{I}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (400)$$

ただし ((238) を見てほしい)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}\{\mathbf{q}\}$$

そして我々は近似値によって行列のブロックを代用する ((238) も見てほしい),

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}_\theta = -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_\times, \quad \mathbf{V}_a = -\mathbf{R}, \quad \mathbf{V}_g = \mathbf{I}, \quad \Theta_\theta = -[\boldsymbol{\omega}]_\times, \quad \Theta_\omega = -\mathbf{I}$$

この方法は行列中のそれぞれのブロックをある最大次数  $n$  に制限することで多少簡単になる。 $n = 1$  のとき、

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \Delta t & -\mathbf{R}\Delta t & 0 & \mathbf{I}\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top} & 0 & -\mathbf{I}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (401)$$

これはオイラー法であり、 $n = 2$  では、

$$\Phi \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}\Delta t & -\frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \Delta t^2 & -\frac{1}{2}\mathbf{R}\Delta t^2 & 0 & \frac{1}{2}\mathbf{I}\Delta t^2 \\ 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \Delta t & -\mathbf{R}\Delta t & \frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{a}]_{\times} \Delta t^2 & \mathbf{I}\Delta t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}\{\boldsymbol{\omega}\Delta t\}^{\top} & 0 & -\mathbf{I}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (402)$$

$n \geq 3$  の時は、完全な形 (400) を得る。

## D ルンゲ=クッタ積分による遷移行列

遷移行列を近似するもう一つの方法が、ルンゲ=クッタ積分を用いることである。この方法は行列  $\mathbf{A}$  が積分区間に沿って一定とみなせない場合、つまり

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (403)$$

となる場合に必要となる可能性がある。同じシステムを連続時間と離散時間で定義する次の2つの関係式を書き換えてみよう。これらは行列  $\mathbf{A}$  と遷移行列  $\Phi$  を含み、

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \quad (404)$$

$$\mathbf{x}(t_n + \tau) = \Phi(t_n + \tau | t_n) \cdot \mathbf{x}(t_n) \quad (405)$$

これらの式から  $\dot{\mathbf{x}}(t_n + \tau)$  を以下の二通りの方法で展開することができる。(時間微分を表す小さなドットに注意)

$$\begin{aligned} (\Phi(t_n + \tau | t_n) \dot{\mathbf{x}}(t_n)) &= \boxed{\dot{\mathbf{x}}(t_n + \tau)} = \mathbf{A}(t_n + \tau)\mathbf{x}(t_n + \tau) \\ \dot{\Phi}(t_n + \tau | t_n)\mathbf{x}(t_n) + \Phi(t_n + \tau | t_n)\dot{\mathbf{x}}(t_n) &= \mathbf{A}(t_n + \tau)\Phi(t_n + \tau | t_n)\mathbf{x}(t_n) \\ \dot{\Phi}(t_n + \tau | t_n)\mathbf{x}(t_n) &= \end{aligned} \quad (406)$$

ここで (406) は、サンプリングされた値であるため、 $\dot{\mathbf{x}}(t_n) = \dot{\mathbf{x}}_n = 0$  となることから導かれる。すると、

$$\dot{\Phi}(t_n + \tau | t_n) = \mathbf{A}(t_n + \tau)\Phi(t_n + \tau | t_n) \quad (407)$$

となり、これは (404) と同じ常微分方程式で、今度は状態ベクトルではなく遷移行列に適用される。ただし、恒等式  $\mathbf{x}(t_n) = \Phi_{t_n|t_n}\mathbf{x}(t_n)$  のため、積分区間の始点  $t = t_n$  において遷移行列は常に以下の恒等式を満たすことに注意されたい。

$$\Phi_{t_n|t_n} = \mathbf{I} \quad (408)$$

RK4 と  $f(t, \Phi(t)) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)$  を用いると、以下のようになる。

$$\Phi \triangleq \Phi(t_n + \Delta t|t_n) = \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \quad (409)$$

ここで

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{A}(t_n) \quad (410)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{A}\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)\left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{K}_1\right) \quad (411)$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{A}\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right)\left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{K}_2\right) \quad (412)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{A}\left(t_n + \Delta t\right)\left(\mathbf{I} + \Delta t \cdot \mathbf{K}_3\right) \quad (413)$$

## D.1 誤差状態の例

ここで非線形時変システムの誤差状態カルマンフィルタを考える。

$$\dot{\mathbf{x}}_t(t) = f(t, \mathbf{x}_t(t), \mathbf{u}(t)) \quad (414)$$

ここで  $\mathbf{x}_t$  は真の状態、 $\mathbf{u}$  は制御入力である。この真の状態は  $\oplus$  で表される、ノミナル状態  $\mathbf{x}$  と誤差状態  $\delta\mathbf{x}$  の合成である。

$$\mathbf{x}_t(t) = \mathbf{x}(t) \oplus \delta\mathbf{x}(t) \quad (415)$$

このとき誤差状態のダイナミクスはノミナル状態と制御入力に依存して時変する線形形式、すなわち

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \cdot \delta\mathbf{x} \quad (416)$$

つまり、(403) における誤差状態ダイナミクスの行列が  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  の形を持つ。誤差状態の遷移行列のダイナミクスは以下のように表される。

$$\dot{\Phi}(t_n + \tau|t_n) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \cdot \Phi(t_n + \tau|t_n) \quad (417)$$

この方程式をルンゲ=クッタ積分するためにはある時刻における  $\mathbf{x}(t)$  と  $\mathbf{u}(t)$  の値が必要だが、RK4 においては  $\{t_n, t_n + \Delta t/2, t_n + \Delta t\}$  となる。簡単なものから始めると、その時刻における制御入力  $\mathbf{u}(t)$  は現在と最後の測定値の線形補間によって次のように得られる。

$$\mathbf{u}(t_n) = \mathbf{u}_n \quad (418)$$

$$\mathbf{u}(t_n + \Delta t/2) = \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2} \quad (419)$$

$$\mathbf{u}(t_n + \Delta t) = \mathbf{u}_{n+1} \quad (420)$$

ノミナル状態のダイナミクスは、実行可能な最も良い方法を用いて積分される必要がある。例えば、RK4 積分を用いると、

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= f(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n) \\ \mathbf{k}_2 &= f\left(\mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_1, \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}\right) \\ \mathbf{k}_3 &= f\left(\mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_2, \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}\right) \\ \mathbf{k}_4 &= f(\mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{k}_3, \mathbf{u}_{n+1}) \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)/6 \end{aligned}$$

これはその時刻における推定値を与える。

$$\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{x}_n \quad (421)$$

$$\mathbf{x}(t_n + \Delta t/2) = \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k} \quad (422)$$

$$\mathbf{x}(t_n + \Delta t) = \mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{k} \quad (423)$$

ここで  $\mathbf{x}(t_n + \Delta t/2) = \frac{\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1}}{2}$  であることに気づくが、これは制御入力に用いたものと同じ線形補間である。これはルンゲ=クッタ更新の線形性を考えれば、驚くことではない。

いずれの方法でノミナル状態値を得たにせよ、遷移行列を積分するための RK4 行列を計算することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}, \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}\right) \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_1\right) \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}, \frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}\right) \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_2\right) \\ \mathbf{K}_4 &= \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{k}, \mathbf{u}_{n+1}\right) \left(\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{K}_3\right) \\ \mathbf{K} &= (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4)/6 \end{aligned}$$

最終的に、次のようになる。

$$\Phi \triangleq \Phi_{t_n + \Delta t | t_n} = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{K} \quad (424)$$

## E ランダムノイズと摂動の積分

ここでは動的システムにおける確率変数の積分のための適切な方法を提供することを目的とする。もちろん、未知の確率変数は積分することができないが、それらの分散と共分散を不確かさの時間発展のために積分することはできる。これは、連続的でありながら(そ

して連続時間で指定され)、離散的に推定されるシステムの推定量における共分散行列を確立するために必要である。連続な動的システムを考えて、

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (425)$$

ここで、 $\mathbf{x}$  は状態ベクトル、 $\mathbf{u}$  はノイズ  $\tilde{\mathbf{u}}$  を含む制御信号のベクトルで、制御測定値は  $\mathbf{u}_m = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}$ 、 $\mathbf{w}$  はランダムな摂動ベクトルである。ノイズと摂動はともに次に表される白色ガウス雑音を仮定する。

$$\tilde{\mathbf{u}} \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{U}^c\} \quad , \quad \mathbf{w}^c \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{W}^c\} \quad (426)$$

ここ  $\bullet^c$  は積分したい連続時間の不確かさの程度を表す。制御信号  $\tilde{\mathbf{u}}$  とランダム摂動  $\mathbf{w}$  のノイズレベルには重要な性質の違いがある。

- 離散化において制御信号は  $n\Delta t$  の周期でサンプリングされ、次のようになる。測定部は当然積分区間では一定とみなされる (つまり  $\mathbf{u}_m(t) = \mathbf{u}_{m,n}$ )。したがって、サンプリング時間  $n\Delta t$  におけるノイズレベルも一定となり、

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(n\Delta t) = \tilde{\mathbf{u}}_n, \quad n\Delta t < t < (n+1)\Delta t \quad (427)$$

- 摂動はサンプリングされることはない。

結果として、これら2つの確率的処理における  $\Delta t$  上での積分が異なる。それを確認してみよう。

連続的誤差状態ダイナミクスは次のように線形化できる。

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{w} \quad (428)$$

ここで、

$$\mathbf{A} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}, \mathbf{u}_m} \quad \mathbf{B} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right|_{\mathbf{x}, \mathbf{u}_m} \quad \mathbf{C} \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{x}, \mathbf{u}_m} \quad (429)$$

サンプリング周期  $\Delta t$  上で積分され、次のようになる。

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \delta\mathbf{x}_n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (\mathbf{A}\delta\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(\tau) + \mathbf{C}\mathbf{w}^c(\tau)) d\tau \quad (430)$$

$$= \delta\mathbf{x}_n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{A}\delta\mathbf{x}(\tau) d\tau + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(\tau) d\tau + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{C}\mathbf{w}^c(\tau) d\tau \quad (431)$$

これは性質が非常に異なる3つの項を持つ。これらは次のように積分することができる。

1. 付録Bより、動的部分は積分して遷移行列を与えればよく、

$$\delta\mathbf{x}_n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{A}\delta\mathbf{x}(\tau) d\tau = \Phi \cdot \delta\mathbf{x}_n \quad (432)$$

このとき  $\Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t}$  は閉形式で計算するか、異なる精度で近似することができる。

Table 5: システムと共分散行列の積分に対する影響

表記	連続時間 $t$	離散時間 $n\Delta t$
状態量	$\dot{\mathbf{x}} = f^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$	$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{w}_n)$
誤差状態量	$\dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{w}$	$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x\delta\mathbf{x}_n + \mathbf{F}_u\tilde{\mathbf{u}}_n + \mathbf{F}_w\mathbf{w}_n$
システム行列	$\mathbf{A}$	$\mathbf{F}_x = \Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t}$
制御行列	$\mathbf{B}$	$\mathbf{F}_u = \mathbf{B}\Delta t$
摂動行列	$\mathbf{C}$	$\mathbf{F}_w = \mathbf{C}$
制御共分散	$\mathbf{U}^c$	$\mathbf{U} = \mathbf{U}^c$
摂動共分散	$\mathbf{W}^c$	$\mathbf{W} = \mathbf{W}^c\Delta t$

2. (427) より、

$$\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(\tau)d\tau = \mathbf{B}\Delta t\tilde{\mathbf{u}}_n \quad (433)$$

これは測定ノイズは一度サンプリングされると、積分区間内では一定のため、決定論的な方法で積分できることを意味する。

3. 確率論から、 $\Delta t$  上の連続的な白色ガウス雑音の積分をすると離散的白色ガウスインパルス  $\mathbf{w}_n$  が生成され、以下のように表される。

$$\mathbf{w}_n \triangleq \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{w}(\tau)d\tau \quad , \quad \mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{W}\} \quad , \quad \text{with } \mathbf{W} = \mathbf{W}^c\Delta t \quad (434)$$

その結果、先程の測定ノイズとは逆に、摂動は積分区間内では決定論的な挙動をしないので、確率的に積分する必要がある。

従って、離散的な誤差状態動的システムは次のように表される。

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x\delta\mathbf{x}_n + \mathbf{F}_u\tilde{\mathbf{u}}_n + \mathbf{F}_w\mathbf{w}_n \quad (435)$$

ここで、遷移行列、制御行列、摂動の行列は次式で与えられる。

$$\mathbf{F}_x = \Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t} \quad , \quad \mathbf{F}_u = \mathbf{B}\Delta t \quad , \quad \mathbf{F}_w = \mathbf{C} \quad , \quad (436)$$

ノイズレベルと摂動レベルは次式で定義される。

$$\tilde{\mathbf{u}}_n \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{U}\} \quad , \quad \mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{W}\} \quad (437)$$

ここで

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^c \quad , \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^c\Delta t \quad . \quad (438)$$

これらの結果は Table 5 にまとめられている。EKF の予測ステップは、次の式に従って誤差状態の平均と共分散行列を伝搬させることになる。

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{F}_x \hat{\mathbf{x}}_n \quad (439)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n+1} &= \mathbf{F}_x \mathbf{P}_n \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{F}_u \mathbf{U} \mathbf{F}_u^\top + \mathbf{F}_w \mathbf{W} \mathbf{F}_w^\top \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{P}_n (e^{\mathbf{A}\Delta t})^\top + \Delta t^2 \mathbf{B} \mathbf{U}^c \mathbf{B}^\top + \Delta t \mathbf{C} \mathbf{W}^c \mathbf{C}^\top \end{aligned} \quad (440)$$

ここで重要なことは、共分散更新 (440) の3つの項に対する積分区間  $\Delta t$  の影響が異なることで、動的誤差項は指数関数的、測定誤差項は二次的、摂動誤差項は線形的である。

## E.1 ノイズと摂動インパルス

既存のコードを再利用した場合や他の著者のドキュメントを解釈する場合などに、今回使用した式よりも単純な形の EKF 予測式に直面することがよくある。

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{F}_x \mathbf{P}_n \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{Q} \quad (441)$$

これは一般的な離散時間の動的システムに相当する。

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x \delta \mathbf{x}_n + \mathbf{i} \quad (442)$$

ここで、

$$\mathbf{i} \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{Q}\} \quad (443)$$

は時刻  $t_{n+1}$  において直接状態ベクトルに加えられるランダムな (白色ガウス) インパルスのベクトルである。行列  $\mathbf{Q}$  は単にインパルスの共分散行列とみなす。これまで見てきたことから、この共分散行列は次のように計算すれば良い。

$$\mathbf{Q} = \Delta t^2 \mathbf{B} \mathbf{U}^c \mathbf{B}^\top + \Delta t \mathbf{C} \mathbf{W}^c \mathbf{C}^\top \quad (444)$$

しばしばそうであるが、インパルスが全ての変数に影響しない場合、行列は完全対角ではなく、疎になることがある。そして、次のような等価な式を書くことができる。

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x \delta \mathbf{x}_n + \mathbf{F}_i \mathbf{i} \quad (445)$$

このとき

$$\mathbf{i} \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{Q}_i\} \quad (446)$$

ここで行列  $\mathbf{F}_i$  は単に各インパルスをそれが影響する状態ベクトルの部分に配置している。このとき、共分散  $\mathbf{Q}_i$  はサイズは小さくなり、完全対角となる。例として、次のセクションを参照されたい。このような場合、ESKF の時間更新は次のようになる。

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{F}_x \hat{\mathbf{x}}_n \quad (447)$$

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{F}_x \mathbf{P}_n \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_i^\top. \quad (448)$$

明らかに、これらの形式は全て等価である。これは一般の摂動  $\mathbf{Q}$  に対する以下の恒等式からわかる。

$$\mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_i^\top = \boxed{\mathbf{Q}} = \Delta t^2 \mathbf{B} \mathbf{U}^c \mathbf{B}^\top + \Delta t \mathbf{C} \mathbf{W}^c \mathbf{C}^\top \quad (449)$$

## E.2 完全なIMUの例

IMUのための誤差状態カルマンフィルタの構築について述べる。誤差状態システムは(238)で定義され、ノミナル状態  $\mathbf{x}$ 、誤差状態  $\delta\mathbf{x}$ 、ノイズを含む制御信号  $\mathbf{u}_m = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}$ 、摂動  $\mathbf{w}$  を含み、次のように与えられる。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{a}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\boldsymbol{\theta} \\ \delta\mathbf{a}_b \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_w \\ \boldsymbol{\omega}_w \end{bmatrix} \quad (450)$$

本稿で検討しているようなIMUのモデルでは、制御ノイズはIMUの測定値に加えられるノイズに相当する。摂動はバイアスに影響を与え、その結果、ランダムウォークの挙動を生じさせる。システム行列、制御行列、摂動行列はそれぞれ次のとおりである。((428), (378)、(238)を参照)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{V}_\theta & \mathbf{V}_a & 0 & \mathbf{V}_g \\ 0 & 0 & \Theta_\theta & 0 & \Theta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbf{R} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (451)$$

通常の場合、IMUにおける加速度センサとジャイロセンサの三つの軸は同様の性質を持つので、ノイズと摂動は等方的である。それらの標準偏差は、以下のようにスカラーとして表される。

$$\sigma_{\tilde{\mathbf{a}}} [m/s^2] \quad \sigma_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} [rad/s] \quad \sigma_{\mathbf{a}_w} [m/s^2\sqrt{s}] \quad \sigma_{\boldsymbol{\omega}_w} [rad/s\sqrt{s}] \quad (452)$$

そしてそれらの共分散行列は完全に対角なので、次のようになる。

$$\mathbf{U}^c = \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{\mathbf{a}}}^2 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \sigma_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}^c = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathbf{a}_w}^2 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \sigma_{\boldsymbol{\omega}_w}^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (453)$$

システムは間隔  $\Delta t$  でサンプリングされた測定値を用いて、(435–438)に従って更新され、遷移行列  $\mathbf{F}_x = \Phi$  は多くの方法で計算することができる(前述の付録参照)

### E.2.1 ノイズ、摂動インパルス

インパルス  $\mathbf{i}$  で表される摂動の場合、以下のようにシステムを再定義することができる。

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_n \mathbf{u}_m) \cdot \delta\mathbf{x}_n + \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{i} \quad (454)$$

このとき、ノミナル状態、誤差状態、制御信号、インパルスベクトルは次のように定義される。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{a}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad \delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p} \\ \delta\mathbf{v} \\ \delta\boldsymbol{\theta} \\ \delta\mathbf{a}_b \\ \delta\boldsymbol{\omega}_b \\ \delta\mathbf{g} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \boldsymbol{\omega}_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{a}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (455)$$

遷移行列と摂動行列は次のように定義される。

$$\mathbf{F}_x = \Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t} \quad , \quad \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (456)$$

インパルスの分散は次のようになる。

$$\mathbf{i} \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{Q}_i\} \quad , \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \Delta t^2 \mathbf{I} & & & 0 \\ & \sigma_\omega^2 \Delta t^2 \mathbf{I} & & \\ & & \sigma_{a_w}^2 \Delta t \mathbf{I} & \\ & & & \sigma_{\omega_w}^2 \Delta t \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (457)$$

この  $\mathbf{F}_i$  は、特に (451) における  $\mathbf{B}$  からすると意外に思われるかもしれない。これは誤差が  $\mathbf{Q}_i$  で等方的に定義されており、従って  $-\mathbf{R}\sigma^2\mathbf{I}(-\mathbf{R})^\top = \sigma^2\mathbf{I}$  と  $-\mathbf{I}\sigma^2\mathbf{I}(-\mathbf{I})^\top = \sigma^2\mathbf{I}$  で  $\mathbf{F}_i$  が導かれるからである。これは等方性のない IMU を考える場合、適切なヤコビアン  $\mathbf{F}_i = [\mathbf{B} \ \mathbf{C}]$  と適切な  $\mathbf{Q}_i$  を用いる必要があるため、不可能である。

もちろん完全な状態の摂動インパルスを用いることができ、

$$\delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_m) \cdot \delta\mathbf{x}_n + \mathbf{i} \quad (458)$$

ここで、

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \\ \mathbf{a}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{i} \sim \mathcal{N}\{0, \mathbf{Q}\} \quad , \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ \sigma_a^2 \Delta t^2 \mathbf{I} & & & & & 0 \\ & \sigma_\omega^2 \Delta t^2 \mathbf{I} & & & & \\ & & \sigma_{a_w}^2 \Delta t \mathbf{I} & & & \\ & & & \sigma_{\omega_w}^2 \Delta t \mathbf{I} & & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (459)$$

Bye bye.

## References

- Chirikjian, G. S. (2012). *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups*, volume 2: Analytic Methods and Modern Applications of *Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhäuser,, Basel.
- Chou, J. (1992). Quaternion kinematic and dynamic differential equations. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 8(1):53–64.
- Dam, E. B., Koch, M., and Lillholm, M. (1998). Quaternions, interpolation and animation. Technical report, Department of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark.
- Eberly, D. (2010). Quaternion algebra and calculus. Technical report, Geometric Tools, LLC.
- Kuipers, J. B. (1999). *Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*. Princeton University Press., Princeton, N.J.
- Li, M. and Mourikis, A. (2012). Improving the accuracy of EKF-based visual-inertial odometry. In *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*, pages 828–835.
- Li, M., Yu, H., Zheng, X., and Mourikis, A. (2014). High-fidelity sensor modeling and self-calibration in vision-aided inertial navigation. In *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on*, pages 409–416.
- Lupton, T. and Sukkarieh, S. (2009). Efficient integration of inertial observations into visual slam without initialization. In *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*.
- Madyastha, V., Ravindra, V., Mallikarjunan, S., and Goyal, A. (2011). Extended Kalman Filter vs. Error State Kalman Filter for Aircraft Attitude Estimation. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Portland, Oregon. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Martinelli, A. (2012). Vision and imu data fusion: Closed-form solutions for attitude, speed, absolute scale, and bias determination. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(1):44–60.
- Piniés, P., Lupton, T., Sukkarieh, S., and Tardós, J. D. (2007). Inertial aiding of inverse depth SLAM using a monocular camera. In *Int. Conf. on Robotics and Automation*.
- Roussillon, C., Gonzalez, A., Solà, J., Codol, J. M., Mansard, N., Lacroix, S., and Devy, M. (2011). RT-SLAM: A generic and real-time visual SLAM implementation. In Crowley, J., Draper, B., and Thonnat, M., editors, *Computer Vision Systems*, volume 6962 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 31–40. Springer Berlin Heidelberg.

- Shoemake, K. (1985). Animating rotation with quaternion curves. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 19(3):245–254.
- Shuster, M. D. (1993). Survey of attitude representations. *Journal of the Astronautical Sciences*, 41:439–517.
- Trawny, N. and Roumeliotis, S. I. (2005). Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation. Technical Report 2005-002, University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng.
- Yazell, D. (2009). Origins of the unusual space shuttle quaternion definition. In *Aerospace Sciences Meetings*, pages –. American Institute of Aeronautics and Astronautics.